

Partie I : étude de la quadrique \mathcal{Q} et de la conique \mathcal{C}

I.1. Intersections de \mathcal{Q} avec une famille de plans

a) $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) \wedge \vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j})$.

b) La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les formules de

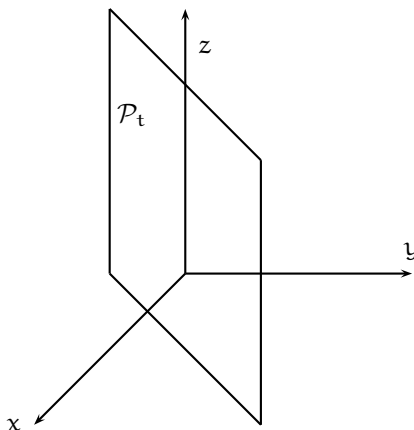
changement de repères s'écrivent alors

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) \\ z = y_1 \end{cases}$$

Soit M un point de \mathcal{E} . On note (x, y, z) les coordonnées de M dans \mathcal{R}_0 et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de M dans \mathcal{R}_1 .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{Q} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_1 + z_1)^2 - \frac{3}{2}(x_1 + z_1)(x_1 - z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}z_1^2 + \sqrt{2}z_1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2\sqrt{2}z_1 = 0. \end{aligned}$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$. \mathcal{P}_t est le plan d'équation $\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = t$ ou encore $x - y = t\sqrt{2}$ dans \mathcal{R}_0 . \mathcal{P}_t est un plan perpendiculaire au plan \mathcal{P} et parallèle au plan d'équation $x = y$ dans \mathcal{R}_0 .



Ensuite

$$M \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_t \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = t \\ x_1^2 + y_1^2 - 5t^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2\sqrt{2}t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = t \\ x_1^2 + \left(y_1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 5t^2 + 2\sqrt{2}t + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = t \\ x_1^2 + \left(y_1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 5\left(t + \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2. \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{P}_t \cap \mathcal{Q}$ est un cercle de centre C_t de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{10}}{5}, t\right)$ dans \mathcal{R}_1 et de rayon $R_t = |t\sqrt{5} + \sqrt{10}|$.

d) R_t est nul si et seulement si $t = -\frac{\sqrt{2}}{5}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}_t \cap \mathcal{Q}$ se réduit à l'unique point S de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$ dans \mathcal{R}_1 ou encore de coordonnées $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ dans \mathcal{R}_0 d'après les formules de changement de repère obtenues à la question b).

I.2. Nature de \mathcal{Q} et de \mathcal{C}

a) Soit M un point de \mathcal{E} . On a $\begin{cases} x_1 = X \\ y_1 = Y + \frac{\sqrt{10}}{5} \\ z_1 = Z - \frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$. Par suite,

$$M \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2\sqrt{2}z_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 - 5\left(Z - \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}\left(Y + \frac{\sqrt{10}}{5}\right) - 2\sqrt{2}\left(Z - \frac{\sqrt{2}}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 5Z^2.$$

b) \mathcal{Q} est donc un cône de révolution de sommet S . L'axe de \mathcal{Q} est la droite de repère (S, \vec{w}) .

c) Une équation de \mathcal{P} dans \mathcal{R}_0 est $z = 0$ puis une équation de \mathcal{P} dans \mathcal{R}_1 est $y_1 = 0$ et finalement une équation de \mathcal{P} dans \mathcal{R} est $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

\mathcal{D} est la droite d'équations $\begin{cases} X = 0 \\ Y = -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ dans \mathcal{R} et donc la droite d'équation $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ dans \mathcal{R}' . $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}'$ admet

pour système d'équations $\begin{cases} X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 5Z^2 \end{cases}$ dans \mathcal{R} et donc \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont les droites d'équations $\begin{cases} X = 0 \\ Z = \frac{1}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$ et

$\begin{cases} X = 0 \\ Z = -\frac{1}{\sqrt{5}}Y \end{cases}$ dans \mathcal{R} ou encore les droites d'équations $Z = \frac{1}{\sqrt{5}}Y$ et $Z = -\frac{1}{\sqrt{5}}Y$ dans \mathcal{R}' . Voir figure page suivante.

Le discriminant de la conique \mathcal{C} est $\Delta = 1 \times 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} < 0$. Donc \mathcal{C} est une conique du genre hyperbole c'est-à-dire soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes. Plus précisément, puisque \mathcal{Q} est un cône de révolution, $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$ est une réunion de deux droites sécantes si et seulement si $S \in \mathcal{P}$. Or, dans \mathcal{R} , $z_S = \frac{\sqrt{10}}{5} \neq 0$ et donc $S \notin \mathcal{P}$.
Donc

\mathcal{C} est une hyperbole.

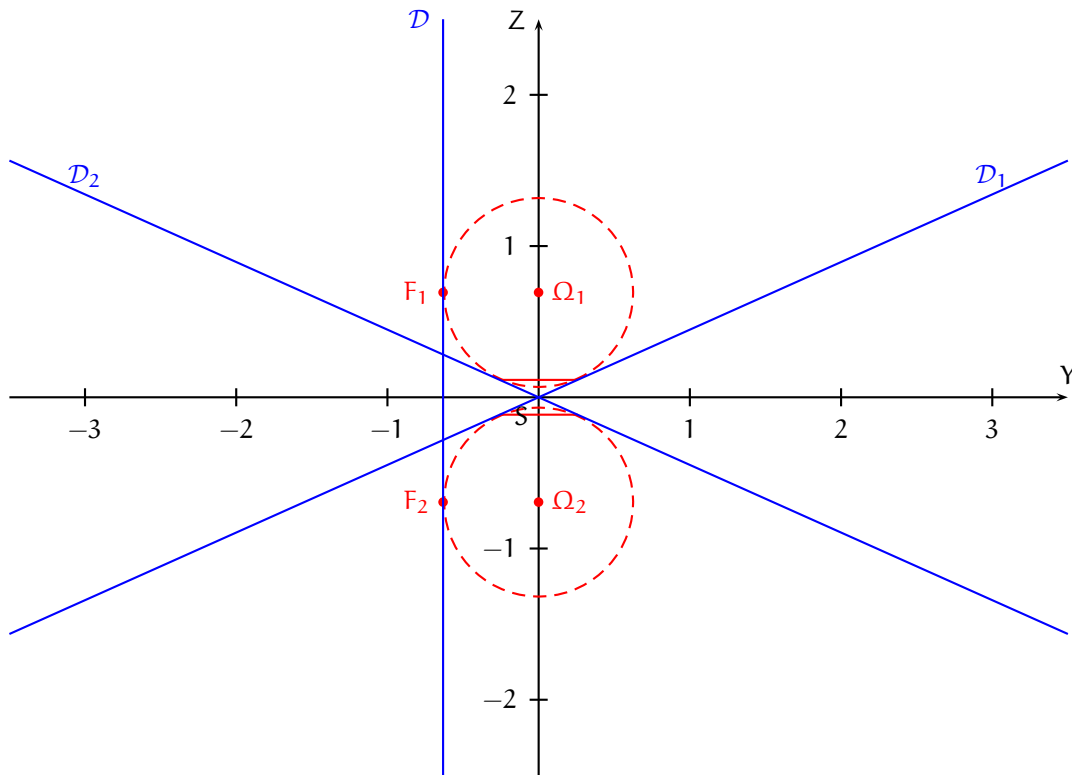
d) Soit $\Omega(0, Z)$ un point de l'axe (S, \vec{w}) . Ω est déjà à égale distance des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Donc Ω est le centre d'un cercle tangent aux trois droites \mathcal{D} , \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 si et seulement si $d(\Omega, \mathcal{D}) = d(\Omega, \mathcal{D}_1)$. Maintenant,

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = d(\Omega, \mathcal{D}_1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{|-Z|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1^2}} \Leftrightarrow Z^2 = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow Z = \pm \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

On trouve donc deux cercles de centres respectifs $\Omega_1 \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)_{\mathcal{R}'}$ et $\Omega_2 \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)_{\mathcal{R}'}$. Le rayon de ces deux cercles est $\rho = d(\Omega_1, \mathcal{D}) = d(\Omega_2, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

e) Ω_1 a pour coordonnées $\left(0, 0, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans \mathcal{R} et \mathcal{P} est le plan d'équation $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ dans \mathcal{R} . La distance de Ω_1 à \mathcal{P} est donc $\frac{\sqrt{10}}{5} = \rho$. Par suite, \mathcal{S}_1 est tangente à \mathcal{P} en F_1 de coordonnées $\left(0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans \mathcal{R} . De même, \mathcal{S}_2 est tangente à \mathcal{P} en F_2 de coordonnées $\left(0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans \mathcal{R} .



\mathcal{S}_1 est la sphère d'équation $X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}$ dans \mathcal{R} . Donc

$$M(X, Y, Z) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ X^2 + Y^2 = 5Z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} - \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 5Z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ 6Z^2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}Z + \frac{2}{25} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ 6\left(Z - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ Z = \frac{1}{5\sqrt{3}} \end{cases}$$

De plus, la distance de Ω_1 au plan d'équation $Z = \frac{1}{5\sqrt{3}}$ est $\left| \frac{1}{5\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{5} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57\dots < 0,6\dots = \frac{\sqrt{10}}{5} = \rho$. Donc

$\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}_1$ est un cercle. Le cercle \mathcal{C}_1 se projette sur \mathcal{P}' en un segment qui a été représenté sur la figure.

On note A et B les points de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{S}_1$. Les plans tangents à \mathcal{Q} et \mathcal{S}_1 en A et B sont perpendiculaires à \mathcal{P}' et leurs traces sur \mathcal{P}' sont confondues : ce sont les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Ces plans tangents sont donc confondus ou encore \mathcal{Q} et \mathcal{S}_1 sont tangents en A et B . Ce résultat reste vrai en tout point du cercle $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}_1$ par révolution d'axe (SZ) .

En résumé, \mathcal{Q} et \mathcal{S}_1 sont tangents le long d'un cercle. Par symétrie, \mathcal{Q} et \mathcal{S}_2 sont tangents le long d'un cercle.

I.3. Deux caractérisations de \mathcal{C}

a) On sait qu'un cône de révolution de sommet S est une réunion de droites passant par S . Donc pour tout point M de \mathcal{Q} distinct de S , la droite (MS) est contenue dans \mathcal{Q} . C'est en particulier le cas si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ car $M \neq S$, S n'étant pas dans \mathcal{P} .

Soit M_0 un point de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$. L'intersection de la droite (M_0S) et du cercle \mathcal{C}_1 est encore l'intersection de la droite (M_0S) et du plan d'équation $Z = \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

$\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$ est l'ensemble d'équations $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 5Z^2 \\ Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}X \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} -X^2 + 5Z^2 = \frac{2}{5} \\ Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}X \end{cases}$ et donc les coordonnées de M_0 dans

\mathcal{R} sont de la forme $\left(X_0, -\frac{\sqrt{10}}{5}X_0, Z_0 \right)$ avec $-X_0^2 + 5Z_0^2 = \frac{2}{5}$ (en particulier, $Z_0 \neq 0$).

La droite (M_0S) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} X = \lambda X_0 \\ Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}\lambda \\ Z = \lambda Z_0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Elle coupe le plan d'équation $Z = \frac{1}{5\sqrt{3}}$

en le point T_1 de coordonnées $\left(\frac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)$.

Par suite,

$$\begin{aligned} M_0T_1^2 &= \left(\frac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}} - X_0 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} - Z_0 \right)^2 \\ &= X_0^2 \left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} + 1 \right)^2 + Z_0^2 \left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1 \right)^2 \\ &= 6Z_0^2 \left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1 \right)^2 = 6 \left(Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} MF_1^2 &= (0 - X_0)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - Z_0 \right)^2 \\ &= 5Z_0^2 - \frac{2}{5} + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - Z_0 \right)^2 = 6Z_0^2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}Z_0 + \frac{2}{25} \\ &= 6 \left(Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}} \right)^2. \end{aligned}$$

Donc, pour tout point M de \mathcal{C} , on a $MT_1 = MF_1$. De même, $MT_2 = MF_2$ par symétrie.

D'autre part, les points M , T_1 et T_2 sont alignés sur la droite (MS) . De plus, $Z_M^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5} + X_0^2 \right) \geq \frac{2}{25} > \frac{1}{75} = (Z_{T_1})^2$.

Donc, ou bien $Z_M > Z_{T_1} > Z_{T_2}$, ou bien $z_{T_1} > Z_{T_2} > z_M$. Ainsi, M est extérieur au segment $[T_1T_2]$. Par suite,

$$\begin{aligned} |MT_1 - MT_2| &= T_1T_2 = 2ST_1 = 2\sqrt{\left(\frac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} \right)^2} \\ &= 2\sqrt{\frac{5Z_0^2 - \frac{2}{5}}{75Z_0^2} + \frac{10}{25 \times 75Z_0^2} + \frac{1}{75}} = 2\sqrt{\frac{5}{75} + \frac{1}{75}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

Mais alors, pour tout point M de \mathcal{C} , on a $|MF_1 - MF_2| = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. On retrouve ainsi la définition bifocale de l'hyperbole. \mathcal{C} est une hyperbole de foyers F_1 et F_2 .

b) Δ_1 est la droite d'équations $\begin{cases} Y = -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ Z = \frac{1}{5\sqrt{3}} \end{cases}$. En particulier, Δ_1 est dirigée par le vecteur \vec{u} . Le projeté orthogonal H_1

de M_0 de coordonnées $\left(X_0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, Z_0\right)$ avec $-X_0^2 + 5Z_0^2 = \frac{2}{5}$ sur Δ_1 a des coordonnées de la forme $\left(X, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$.

L'égalité $\overrightarrow{M_0H_1} \cdot \vec{u} = 0$ fournit $X - X_0 = 0$ et donc H_1 a pour coordonnées $\left(X_0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$. La distance de M_0 à H_1 est donc $\left|Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right|$. D'autre part, on a vu à la question a) que $M_0F_1 = M_0T_1 = \sqrt{6} \left|Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right|$. Donc, pour tout point M de \mathcal{C} , $\frac{MH_1}{MT_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et de même $\frac{MH_2}{MT_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

En résumé, pour tout point M de \mathcal{C} , $MF_1 = \sqrt{6} d(M, \Delta_1)$ et aussi $MF_2 = \sqrt{6} d(M, \Delta_2)$. \mathcal{C} est donc une hyperbole de foyers F_1 et F_2 , de directrices (Δ_1) et (Δ_2) et d'excentricité $\sqrt{6}$.

Partie II : résolution de l'équation diophantienne pour de petites valeurs de n

II.1. Une étude élémentaire

a) Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'équation a un sens si et seulement si $p \geq 1$ et $n \geq 1$ et $0 \leq p-1 \leq n$ et $0 \leq p \leq n-1$ ou encore $2 \leq p+1 \leq n+2$ et $1 \leq p+1 \leq n$ ou enfin $2 \leq p+1 \leq n$. Pour un tel couple d'entiers,

$$\begin{aligned} \binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \Leftrightarrow \frac{n}{(n-p+1)(n-p)} = \frac{1}{p} \\ &\Leftrightarrow np = n^2 + p^2 - 2np + n - p \Leftrightarrow n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{aligned}$$

b) Soit $n \geq 1$. Le discriminant du polynôme $P = n^2 - 3nX + X^2 + n - X = X^2 - (3n+1)X + n^2 + n$ est

$$\Delta = (3n+1)^2 - 4(n^2+n) = 5n^2 + 2n + 1 > 0.$$

Donc le polynôme P admet deux racines réelles à savoir $X_1 = \frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ et $X_2 = \frac{3n+1 + \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

$$\begin{aligned} 2 \leq X_1 + 1 \leq n &\Leftrightarrow 2 \leq \frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2} + 1 \leq n \Leftrightarrow n+3 \leq \sqrt{5n^2+2n+1} \leq 3n-1 \\ &\Leftrightarrow (n+3)^2 \leq 5n^2+2n+1 \leq (3n-1)^2 \text{ (car } 3n-1 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow 4n^2 - 4n - 8 \geq 0 \text{ et } 4n^2 - 8n \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \geq 0 \text{ et } n^2 - 2n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $n \geq 1$, $X_2 + 1 = \frac{3n+1 + \sqrt{5n^2+2n+1}}{2} + 1 > \frac{3n}{2} + 1 > n$ et donc, il n'existe pas d'entier naturel non nul n tel que $2 \leq X_2 + 1 \leq n$.

c) Le résultat est clair si $b \in \{0, 1\}$: $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ sont des carrés parfaits et d'autre part, $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$ sont des rationnels.

Soit b un entier supérieur ou égal à 2. Si b est un carré parfait, alors \sqrt{b} est un entier et en particulier un rationnel. Réciproquement, si \sqrt{b} est un rationnel, il existe deux entiers naturel non nuls p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{b} = \frac{p}{q}$ et donc tels que $p^2 = bq^2$. Mais alors, l'entier q^2 divise l'entier $bq^2 = p^2$. Puisque les entiers p et q sont premiers entre eux, il en est de même des entiers p^2 et q^2 . Comme q^2 divise p^2 et p^2 , q^2 divise le PGCD de p^2 et q^2 c'est-à-dire 1. Par suite, $q^2 = 1$ puis $b = p^2$ et donc b est un carré parfait.

d) Soit (n, p) une solution de (Σ_1) . La question a) montre que $n \geq 2$ puis la question b) montre que l'entier p est nécessairement égal à $X_1 = \frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$. En particulier, $\frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est rationnel et il en est de même de $\sqrt{5n^2+2n+1}$. La question c) montre alors que $5n^2+2n+1$ est un carré parfait.

e) Réciproquement, soit $n \geq 2$ tel que $5n^2+2n+1$ soit un carré parfait. Posons $5n^2+2n+1 = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il existe au plus un entier p tel que (n, p) soit une solution de (Σ_1) à savoir $p = \frac{3n+1 - \sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

Le couple (n, p) est effectivement solution si et seulement si $\frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est un entier ou encore $3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}$ est un entier pair.

$3n+1=2n+(n+1)$ a la parité de $n+1$. D'autre part, $k^2=4n^2+(n^2+2n+1)=4n^2+(n+1)^2$ a la parité de $(n+1)^2$. Comme un entier a même parité que son carré, k a même parité que $n+1$. Finalement, $3n+1$ et $k=\sqrt{5n^2+2n+1}$ ont la même parité puis $3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}=3n+1-k$ est un entier pair et finalement $p=\frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est un entier.

Donc, si $n \geq 2$ et $5n^2+2n+1$ est un carré parfait, alors il existe un unique entier p tel que (n, p) soit une solution de (Σ_1) à savoir $p=\frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

f) Algorithme.

Entrer n_0 .

$n = 2$

Tant $n \leq n_0 - 1$, faire

si $\sqrt{5n^2+2n+1}$ est entier,

$p = (3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1})/2$

afficher (n, p)

$n = n + 1$

sinon

$n = n + 1$

fin

II.2. Une méthode plus arithmétique

a) D'après II.1.a), l'équation $n^2+p^2-3np+n-p=0$ équivaut à l'équation $np=(n-p)(n-p+1)$.

Par suite, $np=n(n-p+1-p)+p(p-1)$ et donc $p(p-1)=n(n+3p-1)$. Ainsi, n divise $p(p-1)$ et puisque n et p sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que n divise $p-1$.

Si $p-1 \geq 1$ ou encore $p \geq 2$, ceci impose en particulier, $p+1 \leq n \leq p-1$ ce qui est impossible. Il ne reste que $p=1$ puis $n^2-2n=0$ et donc $n=2$. Ainsi, il existe un unique couple (n, p) solution de (Σ_1) tel que n et p soient premiers entre eux à savoir $(2, 1)$.

b) Puisque $n > p$, on a $u > v$ ou encore $u-v > 0$. L'égalité $np=(n-p)(n-p+1)$ fournit après simplification par r

$$ruv=(u-v)(ru-rv+1)=r(u-v)^2+(u-v) (*).$$

Mais alors r divise $r(uv-(u-v)^2)=u-v$. Par suite, il existe un entier naturel non nul k tel que $u-v=kr$. Après simplification par r dans l'égalité $(*)$, on obtient

$$uv=k^2r^2+k=k(kr^2+1).$$

Donc k divise uv . Si k n'est pas 1, k admet au moins un facteur premier m supérieur ou égal à 2. m divise k et donc m divise $u-v$. Maintenant, si par exemple m est un facteur premier de u , alors m divise u et m divise $u-v$. Donc m divise $u-(u-v)=v$ ce qui contredit le fait que u et v sont premiers entre eux. Donc $k=1$ puis $r=u-v$.

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $ruv=r^3+r$ ou encore $(r+v)v=r^2+1$ puis $v^2+rv-r^2-1=0$. On en déduit que $v \in \left\{ \frac{-r \pm \sqrt{r^2-4(-r^2-1)}}{2} \right\} = \left\{ \frac{-r \pm \sqrt{5r^2+4}}{2} \right\}$ puis que $v = \frac{\sqrt{5r^2+4}-r}{2}$ car $v > 0$.

Enfin, $p=rv=r \frac{\sqrt{5r^2+4}-r}{2} > r \frac{\sqrt{5r^2}-r}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r^2$ et donc $r^2 < \frac{2p}{\sqrt{5}-1}$ car $\sqrt{5}-1 > 0$.

c) On a déjà le couple $(2, 1)$ qui est l'unique solution telle que $n \wedge p = 1$.

Sinon on a $p \leq 104$ et donc $r^2 < \frac{208}{\sqrt{5}-1}$ puis $2 \leq r < 12,9 \dots$ Donc $r \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$. De plus, $5r^2+4$ doit être un carré parfait ce qui impose $r \in \{3, 8\}$.

- Si $r=3$, $v = \frac{\sqrt{5 \times 3^2 + 4} - 3}{2} = 2$ puis $u = r + v = 5$ puis $n = ru = 15$ et $p = rv = 6$. Réciproquement, si $n=15$ et $p=6$, $np - (n-p)(n-p+1) = 15 \times 6 - 9 \times 10 = 0$ et donc $(15, 6)$ est un couple solution de (Σ_1) .

- Si $r=8$, $v = \frac{\sqrt{5 \times 8^2 + 4} - 8}{2} = 5$ puis $u = r + v = 13$ puis $n = ru = 104$ et $p = rv = 40$. Réciproquement, si $n=104$ et $p=40$, $np - (n-p)(n-p+1) = 104 \times 40 - 64 \times 65 = 0$ et donc $(104, 40)$ est un couple solution de (Σ_1) .

Les couples (n, p) solutions de (Σ_1) tels que $n \leq 105$ sont $(2, 1)$, $(15, 6)$ et $(104, 40)$.

Partie III : un groupe de transformations affines conservant \mathcal{C}

III.1. Définition d'un nouveau repère \mathcal{R}_1 associé à la conique \mathcal{C}

a) Soit M un point de \mathcal{P} .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - 3\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)\left(y_1 + \frac{1}{5}\right) + \left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{1}{5}\right) - \left(y_1 + \frac{1}{5}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

b) $a^2 + b^2 - 3ab = \left(b - \frac{3a}{2}\right)^2 - \frac{5a^2}{4} = \left(b - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}a\right)\left(b - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}a\right)$.

c) Posons donc
$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}x_1 - y_1 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left(y - \frac{1}{5}\right) \\ Y = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}x_1 + y_1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}\left(x + \frac{1}{5}\right) + \left(y - \frac{1}{5}\right) \end{cases}$$
 (on a bien $\frac{\sqrt{5} + 3}{2} + \frac{\sqrt{5} - 3}{2} = \sqrt{5} > 0$). Alors,

$$x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(y_1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x_1\right)\left(y_1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x_1\right) \Leftrightarrow (-X)Y = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5XY + 1 = 0.$$

Enfin,

$$\begin{cases} X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x_1 - y_1 \\ Y = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}x_1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + Y) \\ y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + Y) - \frac{1}{5} \\ y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \frac{1}{5} \end{cases}.$$

d) Les axes de \mathcal{R}_1 sont les asymptotes de l'hyperbole \mathcal{C} .

III.2. Transformations affines conservant \mathcal{C}

a) Soit $h \in \text{GA}(\mathcal{P})$. Si $h \in G_1$, alors $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et en particulier, $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Réciproquement, supposons $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathcal{C}$. f est une bijection continue de \mathbb{R}^* sur \mathcal{C} . Ensuite, \mathcal{C} est la réunion disjointe des deux branches d'hyperbole $\mathcal{C}_1 = f(]0, +\infty[)$ et $\mathcal{C}_2 = f(]-\infty, 0[)$.

L'inclusion $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ permet de définir l'application $g = f^{-1} \circ h \circ f$.

L'application g est injective et continue sur \mathbb{R}^* en tant que composée d'injections et d'applications continues (on sait qu'une application affine d'un espace de dimension finie est continue sur cet espace) et à valeurs dans \mathbb{R}^* . D'après le théorème d'homéomorphie, on sait que g est strictement monotone sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et que l'image par g de chacun de ces deux intervalles est un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $]a, b[\subset \mathbb{R}^*$.

Supposons sans perte de généralité que g soit strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $g(]0, +\infty[) =]a, b[\subset]0, +\infty[$.

Vérifions que $b = +\infty$. Supposons par l'absurde que b soit réel. Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(f(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(g(t)) = f(b) = \left(b, -\frac{1}{5b}\right)$.

Mais d'autre part, en notant $L(h)$ la partie linéaire de h ,

$$\|h(f(t)) - h(0, 0)\| = \|L(h)(f(t) - (0, 0))\| = \left\|L(h)\left(t, -\frac{1}{5t}\right)\right\| = |t| \left\|L(h)\left(1, -\frac{1}{5t^2}\right)\right\|.$$

Quand t tend vers $+\infty$, $\left(1, -\frac{1}{5t^2}\right)$ tend vers $(1, 0)$ et donc $\left\|L(h)\left(1, -\frac{1}{5t^2}\right)\right\|$ tend vers $\|L(h)(1, 0)\|$ (car un endomorphisme d'un espace de dimension finie est continu sur cet espace). Maintenant, puisque h est bijective, il en est de même de $L(h)$ et en particulier $\|L(h)(1, 0)\| \neq 0$. Mais alors $|t| \left\|L(h)\left(1, -\frac{1}{5t^2}\right)\right\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\|h(f(t)) - h(0, 0)\|$. Ceci contredit le fait que $\|h(f(t)) - h(0, 0)\|$ tend vers $\|f(b) - h(0, 0)\|$. Il était donc absurde de supposer b réel et donc $b = +\infty$.

De même, $a = 0$ et donc si $g(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$, alors $g(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Dans ce cas, $h(\mathcal{C}_1) = h(f(]0, +\infty[)) = f(g(]0, +\infty[)) = f(]0, +\infty[) = \mathcal{C}_1$. De même, si $g(]0, +\infty[) \subset]-\infty, 0[$, alors $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

De même, $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$ ou $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$. Enfin, puisque h est injective, on ne peut avoir $h(\mathcal{C}_1) = h(\mathcal{C}_2)$ et donc ou bien $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$, ou bien $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ et $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$. Dans tous les cas, on a $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

b) G_1 est contenu dans $GA(\mathcal{P})$. D'autre part, $\text{Id}_E \in G_1$.

Enfin, si h et k sont des éléments de G_1 , $h \circ k^{-1}(\mathcal{C}) = h \circ k^{-1}(k(\mathcal{C})) = h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et donc $h \circ k^{-1} \in G_1$. On a montré que

G_1 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) L'énoncé fournit l'écriture générale d'une application affine : il existe un unique sextuplet (a, b, c, d, e, f) tel que $\begin{cases} X' = aX + bY + c \\ Y' = dX + eY + f \end{cases}$. De plus, $h \in GA(\mathcal{P})$ si et seulement si la partie linéaire $L(h)$ de h est un automorphisme ce qui équivaut à $\det(L(h)) \neq 0$ ou encore $ae - bd \neq 0$.

d) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$ (ce qui équivaut à $ae - bd \neq 0$). \mathcal{C} est l'ensemble des points M de coordonnées $\left(X, -\frac{1}{5X}\right)$, $X \in \mathbb{R}^*$, dans le repère \mathcal{R}_1 . Donc

$$\begin{aligned} h \in G_1 &\Leftrightarrow h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^*, 5 \left(aX - \frac{b}{5X} + c \right) \left(dX - \frac{e}{5X} + f \right) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^*, 5 \left(aX^2 + cX - \frac{b}{5} \right) \left(dX^2 + fX - \frac{e}{5} \right) + X^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}, 5adX^4 + 5(af + cd)X^3 + (5cf - ae - bd + 1)X^2 - (bf + ce)X + \frac{be}{5} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

En résumé, $\forall h \in GA(\mathcal{P}), h \in G_1 \Leftrightarrow \begin{cases} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae - bd \neq 0 \end{cases} \quad (S).$

e) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ af = 0 \\ 5cf - ae + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae \neq 0 \end{cases} \quad (S_1) \text{ ou } \begin{cases} a = 0 \\ cd = 0 \\ 5cf - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ bd \neq 0 \end{cases} \quad (S_2).$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ ae \neq 0 \\ f = 0 \\ -ae + 1 = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ e = \frac{1}{a} \\ d = 0 \\ f = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ et } (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ bd \neq 0 \\ c = 0 \\ -bd + 1 = 0 \\ f = 0 \\ e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ d = \frac{1}{b} \\ c = 0 \\ f = 0 \\ e = 0 \end{cases} .$

Les éléments de G_1 sont donc les transformations de la forme $h_1 : (X, Y) \mapsto \left(\mu X, \frac{Y}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^*$, et $h_2 : (X, Y) \mapsto \left(\mu Y, \frac{X}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^*$.

On sait qu'une application affine est une symétrie si et seulement si cette application est involutive.

$$h_1^2 = \text{Id} \Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \left(\mu^2 X, \frac{Y}{\mu^2}\right) = (X, Y) \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu \in \{-1, 1\}.$$

D'autre part, $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, h_2^2(X, Y) = h_2\left(\mu Y, \frac{X}{\mu}\right) = \left(\mu \frac{X}{\mu}, \frac{1}{\mu} \mu Y\right) = (X, Y)$ et donc, $\forall \mu \in \mathbb{R}^*, h_2^2 = \text{Id}$.

Les éléments de G_1 qui sont des symétries sont Id , la symétrie centrale de centre I et les transformations $(X, Y) \mapsto \left(\mu Y, \frac{X}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^2$, (qui sont des symétries axiales).

f) G'_1 est contenu dans $GL_2(\mathbb{R})$ car pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$, $\det \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ et $\det \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. D'autre part,

G'_1 contient $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, pour $(\mu, \mu') \in (\mathbb{R}^*)^2$,

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\mu' & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu\mu'} \end{pmatrix} \in G'_1,$$

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu' \\ \frac{1}{\mu'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\mu' \\ \frac{1}{\mu\mu'} & 0 \end{pmatrix} \in G'_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu' \\ \frac{1}{\mu'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu/\mu' & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu/\mu'} \end{pmatrix} \in G'_1 \text{ et donc } G'_1 \text{ est stable pour le produit matriciel.}$$

Enfin, pour $\mu \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{1/\mu} \end{pmatrix} \in G'_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \in G'_1 \text{ et donc } G'_1 \text{ est stable pour le passage à l'inverse.}$$

Finalement, G'_1 est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Les transformations affines considérées associent $(0,0)$ à $(0,0)$. Ces transformations s'identifient à leur partie linéaire. Ensuite, il est connu que l'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans une base donnée est un isomorphisme de l'algèbre $(L(\mathcal{P}), +, \cdot, \circ)$ sur l'algèbre $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$. Il en est de même de sa réciproque. Par restriction, l'application considérée est un isomorphisme de groupes.

III.3. Transformations affines conservant \mathcal{Z}

a) L'homothétie h de centre O et de rapport 2 est une bijection affine vérifiant $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. D'autre part, $h(\mathcal{Z}) = (2\mathbb{Z})^2 \neq \mathbb{Z}^2 = \mathcal{Z}$. Donc, si $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$, on n'a pas nécessairement $h \in G_2$.

b) G_2 est contenu dans $GA(\mathcal{P})$ et $\text{Id} \in G_2$. De plus, si h et k sont dans G_2 , alors $h(k(\mathcal{Z})) = \mathcal{Z}$ et donc $h \circ k \in G_2$ et si $h \in G_2$, $h^{-1}(\mathcal{Z}) = h^{-1}(h(\mathcal{Z})) = \mathcal{Z}$ et donc $h^{-1} \in G_2$. Donc, G_2 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Soit $h : (x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$ avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Z}^6$ et $|ae - bd| = 1$. On a déjà $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. Soit alors $(n, m) \in \mathcal{Z}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les formules de CRAMER fournissent

$$h(x, y) = (n, m) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = n \\ dx + ey + f = m \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{ae - bd} \begin{vmatrix} n - c & b \\ m - f & d \end{vmatrix} \text{ et } y = \frac{1}{ae - bd} \begin{vmatrix} a & n - c \\ d & m - f \end{vmatrix}.$$

Puisque $ae - bd \in \{-1, 1\}$, le couple (x, y) obtenu est dans \mathcal{Z} . Ainsi, $\forall (n, m) \in \mathcal{Z}, \exists (x, y) \in \mathcal{Z}$ tel que $h(x, y) = (n, m)$ et finalement $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $h : (x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$ avec $ae - bd \neq 0$ tel que $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. Déjà, $h(0, 0)$, $h(1, 0)$ et $h(0, 1)$ sont dans \mathcal{Z} et donc $c, f, a + c, d + f, b + c, e + f$ sont des entiers relatifs puis $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Z}^6$.

Ensuite, si t est la translation de vecteur $(-c, -f)$ et si $h' = t \circ h$, on a $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \Leftrightarrow h'(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$.

Maintenant, le système $h'(x, y) = (1, 0)$ a une solution dans \mathbb{Z}^2 fournie par les formules de CRAMER telle que $(ae - bd)x = e$ et $(ae - bd)y = -d$. Donc $ae - bd$ divise d et e . De même, le système $h'(x, y) = (0, 1)$ a une solution dans \mathbb{Z}^2 et donc $ae - bd$ divise a et b .

Mais alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $ax + by$ est divisible par $ae - bd$ de même que $dx + ey$ et donc $\mathbb{Z}^2 = h'(\mathbb{Z}^2) \subset (ae - bd)\mathbb{Z}^2$ et en particulier $\mathbb{Z} \subset (ae - bd)\mathbb{Z}$. Ceci impose $ae - bd = \pm 1$ ou encore $|ae - bd| = 1$.

III.4. Le groupe Γ

a) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = (0, 1).$$

et

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = (-1, 0).$$

Donc P_1 et P_2 existent et sont uniquement définis : P_1 est le point de coordonnées $(-1, 0)$ dans \mathcal{R}_0 et P_2 est le point de coordonnées $(0, 1)$ dans \mathcal{R}_0 .

Soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ puis f_1 la transformation $(x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$.

• $f_1(O) = P_1 \Leftrightarrow (c, f) = (-1, 0)$. On prend donc $c = -1$ et $f = 0$.

• $f_1(P_1) = O \Leftrightarrow (-a-1, -d) = (0, 0)$. On prend donc $a = -1$ et $d = 0$.

• $f_1(I) = I \Leftrightarrow \left(\frac{1+b}{5} - 1, \frac{e}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow b = 3$ et $e = 1$.

Il existe une unique transformation affine f_1 répondant aux contraintes de l'énoncé à savoir la transformation $f_1 : (x, y) \mapsto (-x + 3y - 1, y)$.

Soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ puis f_2 la transformation $(x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$.

• $f_2(O) = P_2 \Leftrightarrow (c, f) = (0, 1)$. On prend donc $c = 0$ et $f = 1$.

• $f_2(P_2) = O \Leftrightarrow (b, e + 1) = (0, 0)$. On prend donc $b = 0$ et $e = -1$.

• $f_2(I) = I \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{5}, \frac{-d-1}{5} + 1\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow a = 1$ et $d = 3$.

Il existe une unique transformation affine f_2 répondant aux contraintes de l'énoncé à savoir la transformation $f_2 : (x, y) \mapsto (x, 3x - y + 1)$.

D'après ce qui précède, $\begin{cases} x_1 = -x + 3y - 1 \\ y_1 = y \end{cases}$ et $\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = 3x - y + 1 \end{cases}$. D'après la question III.3.c), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_2 .

D'après la question III.1.c),

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = -x + 3y - 1 \\ y_1 = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(X_1 + Y_1) - \frac{1}{5} = -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(X + Y) - \frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \frac{1}{5}\right) - 1 \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X_1 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y_1 + \frac{1}{5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \frac{1}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + Y_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}X + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}Y \\ (3 - \sqrt{5})X_1 + (3 + \sqrt{5})Y_1 = (3 - \sqrt{5})X + (3 + \sqrt{5})Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + Y_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}X + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}Y \\ \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}X_1 + Y_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}X + Y \end{cases} \quad (\text{après multiplication par } 3 - \sqrt{5} \text{ et division par } 4) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}Y \\ Y_1 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}X \end{cases} \quad (\text{vérification immédiate}) \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{(7 + 3\sqrt{5})/2} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$. De même,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = 3x - y + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(X_2 + Y_2) - \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + Y) - \frac{1}{5} \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X_2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y_2 + \frac{1}{5} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(X + Y) - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \frac{1}{5}\right) + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 + Y_2 = X + Y \\ (3 - \sqrt{5})X_2 + (3 + \sqrt{5})Y_2 = (3 + \sqrt{5})X + (3 - \sqrt{5})Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = Y \\ Y_2 = X \end{cases} \quad (\text{vérification immédiate}). \end{aligned}$$

D'après la question II.2.e), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_1 qui de plus sont des symétries et d'après la question III.3.c), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_2 . Finalement f_1 et f_2 sont deux éléments de $G_1 \cap G_2$ qui sont des symétries.

b) Les éléments de Γ distinct de Id sont de la forme $f_{i_1}^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ f_{i_p}^{\varepsilon_p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p$. Puisque $f_1^{-1} = f_1$ et $f_2^{-1} = f_2$, ceci se résume aux produits $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et de plus, $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3, \dots, i_{p-1} \neq i_p$ c'est-à-dire les produits du type

(I) $f_1 \circ f_2 \circ f_1 \dots \circ f_1 \circ f_2 = (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$,

(II) $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_1$, $k \in \mathbb{N}$,

(III) $(f_2 \circ f_1)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$

(IV) $f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Maintenant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_2 \circ f_1)^k = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})^k = (f_1 \circ f_2)^{-k}$ et donc les types (I) et (III) se résument aux applications de la forme $(f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_1 = f_1 \circ (f_2 \circ f_1)^k = f_2 \circ f_2 \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k-1}$ (où $-k-1$ décrit \mathbb{Z}_- quand k décrit \mathbb{N}). Par suite, les types (II) et (IV) se résument aux applications de la forme $f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Gamma = \{(f_1 \circ f_2)^k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Comme à la question III.2.f), Γ et Γ_1 sont des groupes isomorphes. Ensuite, $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ et donc pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$(A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix} \text{ et } A_2 (A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix}. \text{ Par suite}$$

$$\Gamma_1 = \{(A_1 A_2)^k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{A_2 (A_1 A_2)^k, k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Puisque $\lambda \in]1, +\infty[$, les matrices ci-dessus sont deux à deux distinctes et donc, par isomorphisme, chaque élément h de Γ correspond à un et un seul des deux cas (i) et (ii) et l'entier relatif intervenant dans la décomposition de h est unique.

d) Soit ϕ un morphisme de Γ dans H tel que $\phi(f_1) = a_1$ et $\phi(f_2) = a_2$. Soit h un élément de Γ . Ou bien il existe un unique entier relatif k tel que $h = (f_1 \circ f_2)^k$ et dans ce cas, on a nécessairement $\phi(h) = (\phi(f_1)\phi(f_2))^k = (a_1 a_2)^k$, ou bien il existe un unique entier relatif k tel que $h = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$ et dans ce cas, on a nécessairement $\phi(h) = \phi(f_2) (\phi(f_1)\phi(f_2))^k = a_2 (a_1 a_2)^k$. Ceci assure l'unicité de ϕ .

Réciproquement, soit ϕ l'application de Γ dans H définie par les égalités précédentes. Soient k et k' deux entiers relatifs.

$$\bullet \phi \left((f_1 \circ f_2)^k \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} \right) = \phi \left((f_1 \circ f_2)^{k+k'} \right) = (a_1 a_2)^{k+k'} = (a_1 a_2)^k (a_1 a_2)^{k'} = \phi \left((f_1 \circ f_2)^k \right) \phi \left((f_1 \circ f_2)^{k'} \right).$$

$$\bullet \phi \left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} \right) = \phi \left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k+k'} \right) = a_2 (a_1 a_2)^{k+k'} = a_2 (a_1 a_2)^k (a_1 a_2)^{k'} \\ = \phi \left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k \right) \phi \left((f_1 \circ f_2)^{k'} \right).$$

• Ensuite,

$$- \text{ si } k \in \mathbb{Z}^-, (f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = (f_2 \circ f_1)^{-k} \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$$

$$- \text{ si } k > 0, (f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = (f_1 \circ f_2)^{k-1} \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_1 \circ (f_2 \circ f_1)^{k-1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}$$

$$= f_2 \circ f_2 \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k+1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k+1} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$$

Dans tous les cas, on a $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$.

Dans ce calcul, seules ont servi les égalités $f_1^2 = f_2^2 = \text{Id}$. Comme $a_1^2 = a_2^2 = 1$, on a donc aussi $(a_1 a_2)^k a_2 (a_1 a_2)^{k'} = a_2 (a_1 a_2)^{k'-k}$ puis

$$\phi \left((f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} \right) = \phi \left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k} \right) = a_2 (a_1 a_2)^{k'-k} = (a_1 a_2)^k a_2 (a_1 a_2)^{k'} \\ = \phi \left((f_1 \circ f_2)^k \right) \phi \left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} \right).$$

$$\bullet \phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}) = \phi(f_2 \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}) = \phi((f_1 \circ f_2)^{k'-k}) = (a_1 a_2)^{k'-k} = a_2 a_2 (a_1 a_2)^{k'-k} \\ = a_2 (a_1 a_2)^k a_2 (a_1 a_2)^{k'} = \phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k) \phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}).$$

En résumé, $\forall (h_1, h_2) \in \Gamma^2$, $\phi(h_1 \circ h_2) = \phi(h_1)\phi(h_2)$ et donc ϕ est effectivement un morphisme de Γ dans H . Ceci montre l'existence de ϕ .

III.5. Utilisation de Γ pour engendrer une infinité de points de \mathcal{S}

a) $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe contenant f_1 et f_2 et donc contenant encore le groupe engendré par f_1 et f_2 . Donc $\Gamma \subset G_1 \cap G_2$. Ceci signifie que pour tout élément h de Γ , $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. En particulier, pour tout élément h de Γ , $h(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ ou encore \mathcal{S} est stable par Γ .

On rappelle que f_1 est la transformation affine qui au point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R}_0 associe le point de coordonnées $(-x + 3y - 1, y)$ et f_2 est la transformation affine qui au point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R}_0 associe le point de coordonnées $(x, 3x - y + 1)$. Donc $f_1 \circ f_2$ est la transformation qui au point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R}_0 associe le point de coordonnées $(-x + 3(3x - y + 1) - 1, 3x - y + 1) = (8x - 3y + 2, 3x - y + 1)$.

On en déduit que $M_1(2, 1)_{\mathcal{R}_0}$ puis $M_2(15, 6)_{\mathcal{R}_0}$ puis $M_3(104, 40)_{\mathcal{R}_0}$. On retrouve ainsi les couples solutions obtenus à la question II.2.c).

b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On note (X_k, Y_k) les coordonnées de M_k dans \mathcal{R}_1 .

D'après la question III.1.c), les coordonnées de O dans \mathcal{R}_1 sont $\left(\frac{\sqrt{5}+5}{10}, \frac{\sqrt{5}-5}{10} \right)$. On a alors

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+5}{10} \\ \frac{\sqrt{5}-5}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+5}{10} \lambda^k \\ \frac{\sqrt{5}-5}{10} \lambda^{-k} \end{pmatrix}$$

puis d'après la question III.1.a)

$$\begin{cases} x_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(X_k + Y_k) - \frac{1}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{10} \lambda^k + \frac{1-\sqrt{5}}{10} \lambda^{-k} - \frac{1}{5} \\ y_k = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} X_k + \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} Y_k + \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{10} \lambda^k - \frac{\sqrt{5}+1}{10} \lambda^{-k} + \frac{1}{5} \end{cases}$$

On note alors que pour $k \in \mathbb{Z}$, le point M_{-k} se déduit du point M_k par la transformation affine s qui au point de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R}_0 associe le point de coordonnées $(-y, -x)$. s est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = -x$.

c) Pour tout réel x , $5x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + (x + 1)^2 > 0$ et donc ϕ_1 et ϕ_2 sont définies sur \mathbb{R} . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + 3x - \sqrt{1 + 2x + 5x^2} \right) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 1 + 3x - 2y \\ &\Leftrightarrow 1 + 2x + 5x^2 = (1 + 3x - 2y)^2 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + (6(1 - 2y) - 2)x + (1 - 2y)^2 - 1 = 0 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (3y - 1)x + y^2 - y = 0 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \text{ et } 1 + 3x - 2y \geq 0 \text{ (car } 5y^2 - 2y + 1 = 4y^2 + (y - 1)^2 > 0). \end{aligned}$$

Maintenant, $1 + 3x - 2y = 1 + 3 \frac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} - 2y = \frac{5y - 1 \pm 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$.

Si $5y - 1 < 0$, alors $\frac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} < 0$ et si $5y - 1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left(\frac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \right) &= \operatorname{sgn} \left((5y - 1)^2 - 9(5y^2 - 2y + 1) \right) = \operatorname{sgn}(-20y^2 + 8y - 8) = - \text{ car} \\ &\Delta' = 4^2 - 20 \times 8 < 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout y , $\frac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} < 0$ et par suite $x = \frac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$ ne convient jamais.

Si $5y - 1 \geq 0$, $\frac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \geq 0$ et si $5y - 1 < 0$,

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \right) = \operatorname{sgn} \left(9(5y^2 - 2y + 1) - (5y - 1)^2 \right) = +.$$

Donc, pour tout y réel, $x = \frac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$ convient. On a montré que pour tout réel y , il existe un réel x et un seul tel que $\phi(x) = y$ à savoir $x = \frac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$.

ϕ_1 est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et de plus $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_1^{-1}(x) = \frac{3x - 1 + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2} = -\phi_1(-x)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède,

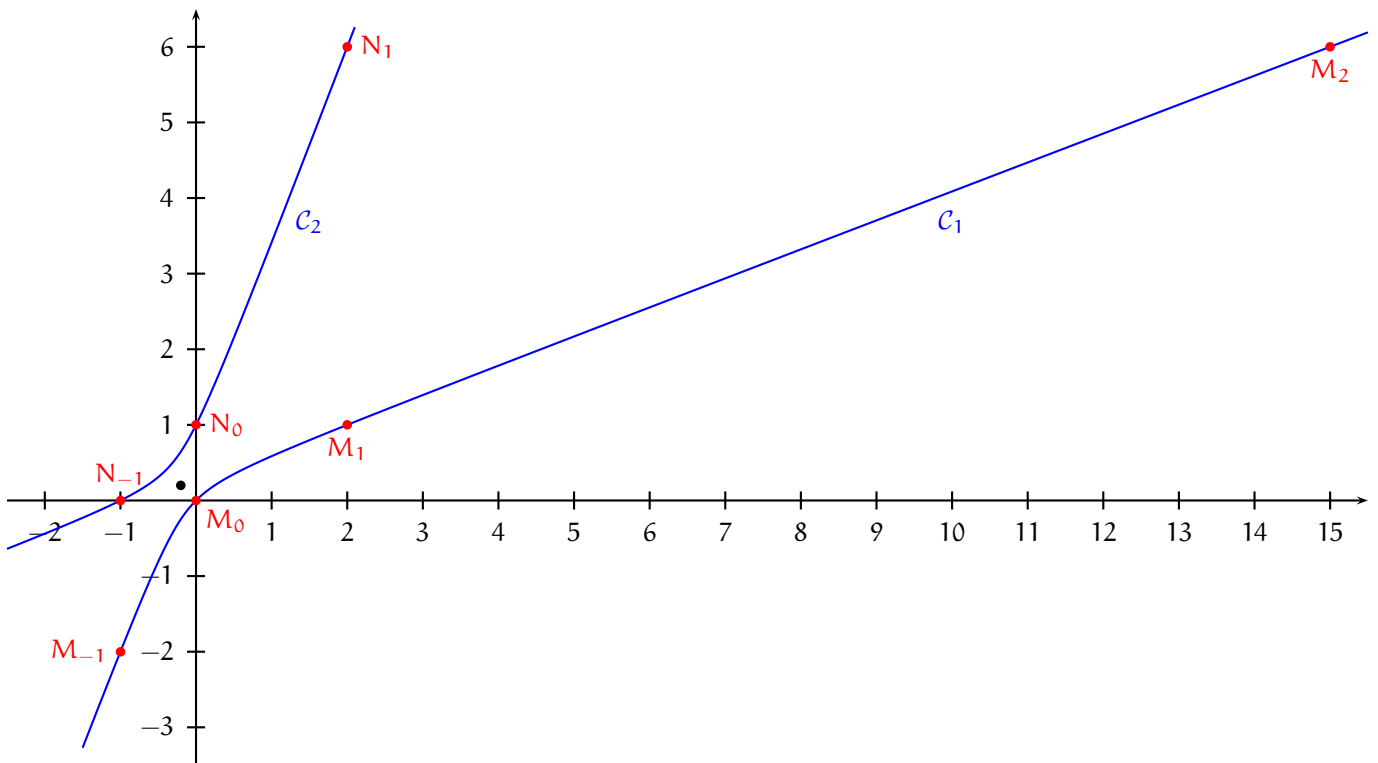
$$\begin{aligned} \phi_2(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + 3x + \sqrt{1 + 2x + 5x^2} \right) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 2y - 1 - 3x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \text{ et } 2y - 1 - 3x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 - \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}. \end{aligned}$$

ϕ_2 est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et de plus $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_2^{-1}(x) = \frac{3x - 1 - \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2} = -\phi_2(-x)$.

\mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ne sont pas vides. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \phi_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 0$ ce qui est impossible. Donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$. Enfin, si M est un point de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} ,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow y^2 - (3x + 1)y + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(3x + 1 \pm \sqrt{5x^2 + 2x + 1}) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont deux ensembles non vides et disjoints dont la réunion est \mathcal{C} et donc \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 forment une partition de \mathcal{C} .



d) Une équation de \mathcal{C} dans le repère \mathcal{R}_0 est $x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$. Une équation de \mathcal{C} dans le repère \mathcal{R}_1 est $5XY + 1 = 0$. \mathcal{C}_1 est la partie de \mathcal{C} telle que $1 + 3x - 2y > 0$ et \mathcal{C}_2 est la partie de \mathcal{C} telle que $1 + 3x - 2y < 0$. Or, d'après la question III.1.c),

$$1 + 3x - 2y = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}(X + Y) - \frac{3}{5} - \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}X - \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}Y - \frac{2}{5} = X - Y.$$

Donc, dans le repère \mathcal{R}_1 , \mathcal{C} a pour équation $5XY + 1 = 0$ et \mathcal{C}_1 est la partie de \mathcal{C} telle que $X - Y > 0$ et \mathcal{C}_2 est la partie de \mathcal{C} telle que $X - Y < 0$.

Maintenant, d'après la question III.4.a), $(X_1, Y_1) = \left(\lambda Y, \frac{1}{\lambda} X\right)$ et $(X_2, Y_2) = (Y, X)$. Donc

$$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow 5XY + 1 = 0 \text{ et } X - Y > 0 \Leftrightarrow 5X_2Y_2 + 1 > 0 \text{ et } X_2 - Y_2 < 0 \Leftrightarrow f_2(M) \in \mathcal{C}_2,$$

et donc aussi, puisque $f_2^{-1} = f_2$, $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow f_2(M) \in \mathcal{C}_1$. Par suite, $f_2(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$ et $f_2(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

Ensuite, $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 5XY + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\lambda Y_1 \frac{X_1}{\lambda} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5X_1Y_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow f_1(M) \in \mathcal{C}$ et donc $f_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$, si $M(x, \phi_1(x))$ est un point de \mathcal{C}_1 et si on note (x_1, y_1) les coordonnées de $f_1(M)$,

$$\begin{aligned} 1 + 3x_1 - 2y_1 &= 1 + 3(-x + 3\phi_1(x) - 1) - 2\phi_1(x) = 7\phi_1(x) - 3x - 2 = 7 \frac{1 + 3x - \sqrt{1 + 2x + 5x^2}}{2} - 3x - 2 \\ &= \frac{15x + 3 - 7\sqrt{1 + 2x + 5x^2}}{2} \end{aligned}$$

Si $15x + 3 < 0$, alors $1 + 3x_1 - 2y_1 < 0$ et si $15x + 3 \geq 0$, $\text{sgn}(1 + 3x_1 - 2y_1) = \text{sgn}((15x + 3)^2 - 49(1 + 2x + 5x^2)) = \text{sgn}(-20x^2 - 8x - 40) = -$ car $\Delta' = 4^2 - 20 \times 40 < 0$.

Ainsi, pour tout point M de \mathcal{C}_1 , on a $1 + 3x_1 - 2y_1 < 0$ et donc $f_1(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_2$.

En remplaçant $-\sqrt{1 + 2x + 5x^2}$ par $\sqrt{1 + 2x + 5x^2}$, si $M(x, \phi_2(x))$ est un point de \mathcal{C}_2 ,

$$1 + 3x_1 - 2y_1 = \frac{15x + 3 + 7\sqrt{1 + 2x + 5x^2}}{2} > 0$$

et donc $f_1(M)$ est un point de \mathcal{C}_1 . Donc, $f_1(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_1$. En résumé, $f_1(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_2$ et $f_1(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_1$. Mais alors $\mathcal{C}_2 = f_1(f_1(\mathcal{C}_2)) \subset f_1(\mathcal{C}_1)$ et donc $f_1(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. Puis, $f_1(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$. On en déduit encore $f_1 \circ f_2(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et $f_1 \circ f_2(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$.

Puisque $M_0 = O \in \mathcal{C}_1$, les $M_k = (f_1 \circ f_2)^k(M_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, appartiennent à la courbe \mathcal{C}_1 puis les $N_k = f_2(M_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, appartiennent à la courbe \mathcal{C}_2 .

Partie IV : résolution de (Σ)

IV.1. Premier cas : P est élément de \mathcal{C}_1 et $n > 0$

a) $P_0 = P \in \mathcal{C}_1$ et si pour $i \in \mathbb{N}$, $P_i \in \mathcal{C}_1$, alors $f_1(P_i) \in \mathcal{C}_2$ puis $P_{i+1} = (f_1 \circ f_2)^{-1}(P_i) = f_2(f_1(P_i)) \in \mathcal{C}_1$. Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i \in \mathcal{C}_1$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. On a $f_2(P_{i+1}) = f_1(P_i)$. L'abscisse de $f_2(P_{i+1})$ est celle de P_{i+1} à savoir α_{i+1} et donc, puisque $f_2(P_{i+1}) \in \mathcal{C}_2$, $\beta_{i+1} = \phi_2(\alpha_{i+1})$.

L'ordonnée β_{i+1} de $f_2(P_{i+1})$ est aussi celle de $f_1(P_i)$ ou encore celle de P_i . Puisque $P_i \in \mathcal{C}_1$, $\phi_2(\alpha_{i+1}) = \beta_{i+1} = \beta_i = \phi_1(\alpha_i)$ et finalement, $\alpha_{i+1} = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_i)$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \alpha_{i+1} = \phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_i)) \text{ et } \beta_i = \phi_1(\alpha_i).$$

b) Les graphes tracés à la question III.5.c) montrent que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont strictement décroissantes sur \mathbb{R} . Par suite, la fonction ϕ_2^{-1} est strictement décroissante sur \mathbb{R} puis la fonction $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . On sait alors que la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone (car $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}) = \text{sgn}(\phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_{i+1})) - \phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_i))) = \text{sgn}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$). De plus,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha_1 - \alpha_0) &= \text{sgn}(\phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_0)) - \alpha_0) = \text{sgn}(\phi_2 \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_0) - \phi_2(\alpha_0)) = \text{sgn}(\phi_1(\alpha_0) - \phi_2(\alpha_0)) \\ &= \text{sgn}(-\sqrt{1 + 2\alpha_0 + 5\alpha_0^2}) = -. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Si cette suite est minorée, elle converge vers un certain réel α vérifiant $\alpha = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha)$ (car $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est continue sur \mathbb{R}) ou encore $\phi_2(\alpha) = \phi_1(\alpha)$. Mais ceci est impossible car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_2(x) - \phi_1(x) = \sqrt{1 + 2x + 5x^2} > 0$. Donc

la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et non minorée.

0 n'est donc pas un minorant de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $\{i \in \mathbb{N} / \alpha_i \leq 0\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} . Elle admet un plus petit élément que l'on note k . Puisque $\alpha_0 = n > 0$, on a $k \geq 1$ et par définition, k est un entier naturel non nul tel que $\alpha_k \leq 0 < \alpha_{k-1}$.

c) Le point P_{k-1} est un point de \mathcal{C}_1 d'abscisse strictement positive et entière. Comme $\phi_1(1) = 2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, on a $\alpha_{k-1} \geq 2$. Puisque la fonction $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que

$$\alpha_k = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_{k-1}) \geq \phi_2^{-1} \circ \phi_1(2) = \phi_2^{-1}(1) = \frac{2 - \sqrt{4}}{2} = 0.$$

Par suite, $\alpha_k \leq 0 \leq \alpha_k$ et donc $\alpha_k = 0$ puis $\beta_k = \phi_1(0) = 0$. Finalement, $P_k = O$ puis $O = P_k = (f_1 \circ f_2)^{-k}(P)$ et donc $P = (f_1 \circ f_2)^k(O) = M_k$.

d) Les solutions de (Σ_1) sont les couples $(n, \phi_1(n))$, $n \in \mathbb{N}^*$, où de plus $\phi_1(n)$ est entier. D'après la question III.5, tout couple de coordonnées d'un point M_k , $k \in \mathbb{N}^*$, est une solution de (Σ_1) et d'après ce qui précède, toute solution de (Σ_1) est un couple de coordonnées d'un point M_k , $k \in \mathbb{N}^*$. Donc les solutions de (Σ_1) sont les couples de coordonnées des points M_k où k décrit \mathbb{N}^* .

IV.2. Deuxième cas : P est élément de \mathcal{C}_1 et $n < 0$

a) D'après la question III.5.c), $\phi_1(n) = p \Rightarrow n = \phi_1^{-1}(p) \Rightarrow -n = \phi_1(-p)$ et donc $P' \in \mathcal{C}_1$.

b) Puisque $n < 0$, on a $p = \phi_1(n) < 0$. Ainsi, l'abscisse de P' est strictement positive et P' est élément de \mathcal{C}_1 . Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P' = M_k$. Maintenant, d'après la question III.5.b), si s est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$, $P = s(P') = s(M_k) = M_{-k}$. Encore une fois P est l'un des M_k , $k \in \mathbb{Z}$.

IV.3. Troisième cas : P est élément de \mathcal{C}_2

$f_2(P)$ est un élément de \mathcal{C}_1 à coordonnées entières. D'après les questions, IV.1 et IV.2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f_2(P) = M_k$. Mais alors, $P = f_2(M_k) = N_k$.