

PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

1. Première méthode

a) Soit $k \geq 2$. On a $0 < k-1 \leq k$ et donc $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \times k} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie quand $n = 1$ car $s_1 = 1$. Donc

$\forall n \geq 1, s_n \leq 2.$

c) Soit $n \geq 1$. $s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Donc la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Ainsi, la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par 2. On en déduit que cette suite converge et que sa limite S est inférieure ou égale à 2.

2. Deuxième méthode

a) Soit $n \geq 1$. $t_{n+1} - t_n = s_{n+1} - s_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0$.
Donc la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Ainsi, la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante et la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc les suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent vers une limite commune S et en particulier, la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ converge vers S .

b) Pour tout entier naturel non nul n , on a $s_n \leq S \leq t_n$. Donc, pour tout entier naturel non nul, $0 \leq S - s_n \leq t_n - s_n = \frac{1}{n}$.
Soit $n \geq 1$.

$$0 \leq S - s_n \leq \frac{10^{-1}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{10^{-1}}{2} \Leftrightarrow n \geq 20.$$

Donc, $0 \leq S - s_{20} \leq \frac{10^{-1}}{2}$ ou encore $s_{20} \leq S \leq s_{20} + \frac{10^{-1}}{2}$. Maintenant, $s_{20} = 1,596\dots$ et donc $s_{20} + \frac{10^{-1}}{2} = 1,646\dots$
Par suite, $1,59 \leq S \leq 1,69$.

3. Troisième méthode

Exercice. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

b) En déduire que $\forall n \geq 2, s_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c) Montre que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

2) Montrer que la suite $(s_n)_{n \geq 2}$ converge.

DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. En développant l'expression $a_n(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ et en identifiant à $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, on obtient $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

2. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sin((2p+1)\varphi) &= \text{Im} \left(e^{(2p+1)i\varphi} \right) = \text{Im} \left((\cos \varphi + i \sin \varphi)^{(2p+1)} \right) \\ &= \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \cos^{2p+1-k} \varphi (i \sin \varphi)^k \right) \\ &= \text{Im} \left(\sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2k} \cos^{2p+1-2k} \varphi (-1)^k \sin^{2k} \varphi + i \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p+1-(2k+1)} \varphi (-1)^k \sin^{2k+1} \varphi \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k} \varphi \sin^{2k+1} \varphi \end{aligned}$$

b) Si de plus $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1} \varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k} \varphi \sin^{2k-2p} \varphi = \sin^{2p+1} \varphi \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cotan^2 \varphi)^{p-k}.$$

3. a) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \pi$ et en particulier $\frac{k\pi}{2p+1}$. On peut alors écrire

$$P(\gamma_k) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{2p+1}{2j+1} \left(\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} \right)^{p-j} = \frac{\sin \left((2p+1) \frac{k\pi}{2p+1} \right)}{\sin^{2p+1} \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)} = 0$$

b) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $0 < \frac{\pi}{2p+1} \leq \frac{k\pi}{2p+1} \leq \frac{p\pi}{2p+1} < \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right)\pi}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$.

Maintenant, la fonction cotangente est strictement décroissante et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que

$0 < \cotan \frac{p\pi}{2p+1} < \cotan \frac{(p-1)\pi}{2p+1} < \dots < \cotan \frac{\pi}{2p+1}$ puis, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}^+ , $\gamma_p < \gamma_{p-1} < \dots < \gamma_1$.

En particulier, les p nombres γ_k , $1 \leq k \leq p$, sont deux à deux distincts et tous racines du polynôme P de degré p . Ce sont donc toutes les racines de P .

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après le rappel de la question 1),

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right) = \sum_{k=1}^p \gamma_k = -\frac{\binom{2p+1}{3}}{\binom{2p+1}{1}} = \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)/6}{(2p+1)} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

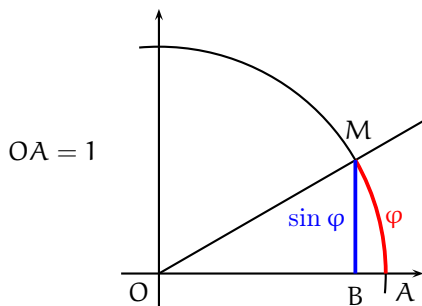
Ensuite,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)} = \sum_{k=1}^p \left(1 + \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right) \right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{p(2p-1+3)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^p \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right) = \frac{p(2p-1)}{3} \text{ et } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2p+1} \right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

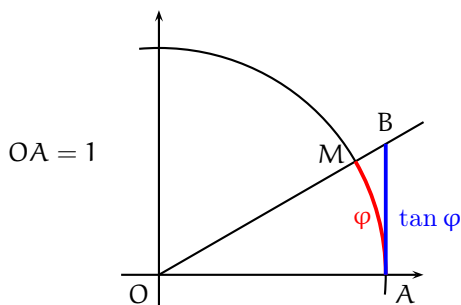
4. a) **Remarque.** Il n'est pas question de démontrer les inégalités de l'énoncé en dérivant la fonction $\varphi \mapsto \varphi - \sin \varphi$ ou en utilisant une formule de TAYLOR car la formule $\sin' = \cos$ est établie à partir de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, limite elle-même établie à partir de l'encadrement $\sin x \leq x \leq \tan x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Soit $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Le dessin suivant suffira pour l'inégalité $\sin \varphi < \varphi$:



$\sin \varphi = MB$ est la distance de M à la droite (OA) .
 Cette distance est strictement inférieure à la longueur de toute courbe distincte du segment $[MB]$ joignant le point M à un point de la droite (OA) .
 Cette distance est en particulier strictement inférieure à la longueur de l'arc \widehat{AM} c'est-à-dire φ .

Pour l'inégalité $\varphi < \tan \varphi$, on peut considérer des aires :



L'aire du secteur angulaire OMB est $\frac{\varphi}{2}$.

L'aire du triangle OAB est $\frac{\tan \varphi}{2}$.

Donc $\frac{\varphi}{2} < \frac{\tan \varphi}{2}$ ou encore $\varphi < \tan \varphi$.

$$\forall \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[, 0 < \sin \varphi < \varphi < \tan \varphi.$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 < \sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{k\pi}{2p+1} < \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ puis, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$, $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$. En sommant

ces inégalités, on obtient

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^p \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \sum_{k=1}^p \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2} = \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$

c) On en déduit encore que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$. Maintenant, quand p tend vers $+\infty$,

$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} \sim \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} \sim \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans

l'encadrement précédent, on obtient $\frac{\pi^2}{6} \leq S \leq \frac{\pi^2}{6}$ et donc

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{4}s_n$ et donc la suite (u_n) converge vers $U = \frac{S}{4} = \frac{\pi^2}{24}$.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = s_{2n+1} - u_n$ et donc la suite (v_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{3S}{4}$.

Enfin, la suite (w_n) converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et

$$W = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -U + V = \frac{S}{2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$U = \frac{\pi^2}{24}, V = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } W = \frac{\pi^2}{12}.$$

TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

1. $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = 1$ et $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \frac{\pi^3}{24}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos^{2n+1} t$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \times \cos^{2n+1} t \, dt = [\sin t \cos^{2n+1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t (-2n+1) \sin t \cos^{2n} t \, dt \\ &= (2n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n} t \, dt \quad (\cos^{2n+1}(\pi/2) = 0 \text{ car } 2n+1 > 0) \\ &= (2n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t \, dt = (2n+1)(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit que $(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n$ et donc que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n.$

b) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 1}{(2n)(2n-2) \times \dots \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \times \dots \times 1}{((2n)(2n-2) \times \dots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \times \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$

3. a) Soit $n \geq 1$. Deux intégrations par parties successives fournissent

$$\begin{aligned} I_n &= [t \cos^{2n} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t (-2n) \sin t \cos^{2n-1} t \, dt = n \int_0^{\pi/2} 2t \sin t \cos^{2n-1} t \, dt \\ &= n \left([t^2 \sin t \cos^{2n-1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos t \cos^{2n-1} t - \sin t (2n-1) \sin t \cos^{2n-2} t) \, dt \right) \\ &= n \int_0^{\pi/2} t^2 (-\cos^{2n} t + (2n-1) \sin^2 t \cos^{2n-2} t) \, dt = n \int_0^{\pi/2} t^2 (-\cos^{2n} t + (2n-1)(1 - \cos^2 t) \cos^{2n-2} t) \, dt \\ &= n \left((2n-1) \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n-2} t \, dt - 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt \right) = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n. \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n.$

b) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n &\Rightarrow \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4n^2} = \frac{n(2n-1)}{4n^2} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4n^2} = \frac{2n-1}{4n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n-2)!}{4^{n-1} ((n-1)!)^2} K_{n-1} - K_n \\ &\Rightarrow K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}. \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.$

c) Soit $n \geq 1$. $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4k^2} = \sum_{k=1}^n (K_{k-1} - K_k) = K_0 - K_n = J_0 - K_n$ (somme télescopique).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.$$

4. a) La fonction sin est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin'' = -\sin$. Par suite, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction \sin'' est négative puis la fonction sin est concave. En particulier, la graphe de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est au-dessus de la corde joignant les points $(0, \sin 0) = (0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. On en déduit que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ ou encore, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégration puis

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt \leq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} \sin t\right)^2 \cos^{2n} t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t \, dt = \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \\ &= \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}. \end{aligned}$$

On en déduit encore $0 \leq \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ puis $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$ après simplification par le réel strictement positif $\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

c) En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$. Mais alors d'après les questions 1. et 3.c), $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{\pi} J_0 = \frac{\pi^2}{6}$.

QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

1. Soient $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} D_n(x) &= \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) x \right) \right) \\ &= \sin \frac{x}{2} + \sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right) - \sin \frac{x}{2} \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right) \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{x}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. On en déduit que $D_n(x) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_n(x) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

2. a) Soit $k \geq 1$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^\pi x \cos(kx) \, dx = \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx = \frac{1}{k} \left[\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

b) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x \, dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x \cos(kx) \, dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, \pi[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \pi[$.

Ensuite, $\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x/2} = 2$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est

$$\text{la fonction } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}.$$

Pour $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. Quand x tend vers 0,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2} + o(x^2) - \frac{x}{2}(1 + o(x))}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{o(x^2)}{\frac{x^2}{4} + o(x^2)} = o(1),$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

En résumé,

- f est continue sur $[0, \pi]$,
- f est de classe C^1 sur $]0, \pi[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (et en particulier est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$).

4. Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Pour $\lambda > 0$, une intégration par parties fournit

$$\int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) \, dx = \left[-\phi(x) \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} \right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \phi'(x) \cos(\lambda x) \, dx = \frac{1}{\lambda} \left(\phi(0) - \cos(\lambda \pi) \phi(\pi) + \int_0^\pi \phi'(x) \cos(\lambda x) \, dx \right).$$

On en déduit que $\left| \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) \, dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)| \, dx \right)$. Maintenant, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \left(|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)| \, dx \right) = 0$

et donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) \, dx = 0$.

5. a) D'après la question 1., pour tout entier naturel non nul n , on a $L_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \, dx$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ d'après la question 3., la question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$.

b) Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - S - W \\ &= \frac{\pi^2}{4} - S - \frac{S}{2} \quad (\text{d'après la question II.5.}) \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{3S}{2}, \end{aligned}$$

et on retrouve $S = \frac{2}{3} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$.

CINQUIÈME PARTIE : Une somme double

1. a) Soit $N \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$ et pour $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt$.

En sommant ces inégalités, on en déduit que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{k} \geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1)$ et $\sum_{n=2}^N \frac{1}{k} \geq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt = \int_1^N \frac{1}{t} dt = \ln(N)$ puis $\sum_{n=1}^N \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(N)$.

Ainsi, pour tout $N \geq 2$, $\ln(N+1) \leq H_N \leq 1 + \ln(N)$ ce qui reste clairement vrai pour $N = 1$.

b) En particulier, pour tout entier naturel non nul N , $0 \leq \frac{H_N}{N} \leq \frac{1}{N} + \frac{\ln N}{N}$. Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} + \frac{\ln N}{N} = 0$, on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{H_N}{N} = 0$.

c) Soit $M \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} &= \sum_{m=1}^{M-1} \left(\frac{H_m}{m} - \frac{H_{m+1}}{m+1} \right) = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m} - \sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m} - \sum_{m=2}^M \frac{1}{m} \left(H_m - \frac{1}{m} \right) = \frac{H_1}{1} + \sum_{m=2}^M \frac{H_m}{m} - \frac{H_M}{M} - \sum_{m=2}^M \frac{H_m}{m} + \sum_{m=2}^M \frac{1}{m^2} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}. \end{aligned}$$

d) Puisque $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{H_M}{M} = 0$, on en déduit que $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = S$.

$$S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)}.$$

2. a) Soient $N \geq 1$ et $m \geq 2$.

$$\begin{aligned} Z_{N,m} &= \frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^N \frac{(n+m-1) - n}{n(n+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Maintenant,

- si $m \geq N+2$, on écrit $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{m-1} \frac{1}{n} \right) - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$,
- si $m = N+1$, on a directement $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$,
- si $m \leq N$, on écrit $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \left(\sum_{n=m}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right) = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$.

Dans tous les cas, $Z_{N,m} = \frac{1}{m-1} \left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \right)$.

b) Soit $m \geq 2$. Pour $N \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{m-1} \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m-1} \underbrace{\left(\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+1} \right)}_{m-1} = \frac{1}{N+1}$ et comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$,

on a encore $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{m-1} \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que

$$\forall m \geq 2, \lim_{N \rightarrow +\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}.$$

3. a) Soient $N \geq 1$ et $M \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \left(\sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} \right) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m-1)} \right) \\ &= \frac{1}{1} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1-1)} \right) + \sum_{m=2}^M \frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m-1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^M \frac{Z_{N,m}}{m}. \end{aligned}$$

b) Soit $M \geq 2$. Quand N tend vers $+\infty$, la question précédente et la question 2.b) fournissent

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}.$$

c) Pour $M \geq 2$, $\sum_{m=2}^M \frac{H_{m-1}}{m(m-1)} = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$. D'après la question 1.c), $\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)}$ tend vers $\frac{\pi^2}{3}$ quand M tend vers $+\infty$ et donc

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{3}.$$

SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme

1. La fonction $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$. f est définie et continue sur $[-1, 1[\setminus\{0\}$ et est prolongeable par continuité en 0 car

$$-\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{-t}{t} = 1. \text{ On pose alors } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in [-1, 1[\setminus\{0\} \end{cases}.$$

Puisque f est définie et continue sur $[-1, 1[$, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est définie et de classe C^1 sur $[-1, 1[$. En particulier, pour tout réel x de $[-1, 1[$, $\text{Li}(x) = \int_0^x f(t) dt$ existe.

2. La fonction f est continue sur $[0, 1[$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées, $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. On en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t) dt$ converge en 1 ou encore que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Li}(x)$ existe dans \mathbb{R} ou enfin que la fonction Li est prolongeable par continuité en 1.

3. a) Le rayon de la série entière $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est 1. En particulier, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est définie et dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

Pour $x \in] -1, 1[\setminus\{0\}$, $\text{Li}'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ car $\text{Li}'(0) = f(0) = 1$.

Par suite, les fonctions Li et $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sont définies et dérivables sur $] -1, 1[$, ont mêmes dérivées et coïncident en 0. On en déduit que ces deux fonctions coïncident sur $] -1, 1[$. Donc

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$. Puisque chaque

fonction f_n est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Mais alors puisque la fonction Li est également continue sur $[-1, 1]$, on a

$$\text{Li}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Li}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\text{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

4. a) On note g la fonction $x \mapsto \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x)$.

La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$ et la fonction Li est dérivable sur $]0, 1[$. Donc la fonction $x \mapsto \text{Li}(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$ et il en est de même de la fonction g . De plus, $\text{Li}' = f$ (f a été définie à la question 1.) et donc pour $x \in]0, 1[$,

$$g'(x) = \text{Li}'(x) - \text{Li}'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}.$$

b) Pour $x \in]0, 1[$, posons $h(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$. h est dérivable sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} = g'(x).$$

Donc, il existe une constante C telle que $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = h(x) + C = -\ln(1-x)\ln(x) + C$. Maintenant, $-\ln(1-x)\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x) \rightarrow 0$ et d'autre part, $g(x)$ tend vers $0 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$ quand x tend vers 0. Quand x tend vers 0, on obtient donc $C = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).}$$

5. Quand $x = \frac{1}{2}$, on obtient en particulier $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 2$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.}$$

6. a) Soit $x \in]-1, 1[$. Alors $x^2 \in]-1, 1[$ et

$$\begin{aligned} \text{Li}(x) + \text{Li}(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n^2} \\ &= 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^m}{m^2} = \frac{1}{2} \text{Li}(x^2). \end{aligned}$$

Remarque. La question 3. montre directement que le calcul précédent est valable sur $[-1, 1]$.

b) Les deux fonctions $x \mapsto \text{Li}(x) + \text{Li}(-x)$ et $x \mapsto \frac{1}{2} \text{Li}(x^2)$ sont continues sur $[-1, 1]$ d'après la question 2. et coïncident sur $] -1, 1[$ d'après la question précédente. On en déduit que ces deux fonctions coïncident sur $[-1, 1]$. En particulier, $\text{Li}(-1) + \text{Li}(1) = \frac{1}{2} \text{Li}(1)$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \text{Li}(-1) = -\frac{1}{2} \text{Li}(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

7. a) La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$ (car $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = -\frac{2}{(x+1)^2}$). Donc, quand x décrit $]0, 1[$, $\frac{1-x}{1+x}$ décrit $\left[\frac{1-1}{1+1}, \frac{1-0}{1+0}\right[=]0, 1[$.

On note g et h les fonctions définies sur $]0, 1[$ par : $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = \text{Li}(x) - \text{Li}(-x) + \text{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \text{Li}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et $\forall x \in]0, 1[$, $h(x) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x)$.

g est dérivable sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{-x} - \frac{2}{(x+1)^2} \frac{\ln\left(1 - \frac{1-x}{1+x}\right)}{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{2}{(x+1)^2} \frac{\ln\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{x-1}{x+1}} \\ &= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1} \left(\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \ln\left(\frac{2}{1+x}\right)\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1} \ln(x). \end{aligned}$$

h est dérivable sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$,

$$h'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2} \frac{1}{(1+x)/(1-x)} \ln(x) + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1} \ln(x).$$

Ainsi, les fonctions g et h ont la même dérivée sur $]0, 1[$ et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = C + h(x)$. Quand x tend vers 0, $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \ln(x) \sim \ln(1-x) \ln(x) \sim -x \ln(x)$ et donc $h(x)$ tend vers $\frac{\pi^2}{4}$ quand x tend vers 0.

D'autre part, quand x tend vers 0, $g(x)$ tend vers $\text{Li}(0) - \text{Li}(0) + \text{Li}(1) - \text{Li}(-1) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}$. Quand x tend vers 0, on obtient donc $C = 0$.

$$\forall x \in]0, 1[, \text{Li}(x) - \text{Li}(-x) + \text{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \text{Li}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ln(x).$$

b) Si $x = \sqrt{2} - 1 \in]0, 1[$, $\frac{1-x}{1+x} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. Par suite, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}-1) &= 2 \left(\text{Li}(\sqrt{2}-1) - \text{Li}(-(\sqrt{2}-1)) \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - (-1)^n) \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n^2} = 4 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2m+1}}{(2m+1)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} &= \frac{g(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{h(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) \ln(\sqrt{2}-1) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2(\sqrt{2}-1) \right). \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2(\sqrt{2}-1) \right).$$