

A - UNE ESTIMATION À LA TCHEBYCHEV
I. Une minoration de la fonction π
A.I.1.

A.I.1.a) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $I(1, a) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} dx = \left[-\frac{1}{a}(1-x)^a \right]_0^1 = \frac{1}{a}$.

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, I(1, a) = \frac{1}{a}.$$

A.I.1.b) Soient a et b deux entiers naturels tels que $1 \leq b < a$. Les deux fonctions $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto -\frac{(1-x)^{a-b}}{a-b}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I(b+1, a) &= \int_0^1 x^b (1-x)^{a-b-1} dx = \left[-x^b \frac{(1-x)^{a-b}}{a-b} \right]_0^1 + \frac{b}{a-b} \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx \\ &= 0 + \frac{b}{a-b} \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx \quad (\text{car } b > 0 \text{ et } a-b > 0) \\ &= \frac{b}{a-b} I(b, a) \end{aligned}$$

A.I.1.c) Soient a et b des entiers naturels tels que $2 \leq b \leq a$.

$$\begin{aligned} I(b, a) &= \frac{b-1}{a-(b-1)} \times \frac{b-2}{a-(b-2)} \times \dots \times \frac{1}{a-1} I(1, a) = \frac{(b-1)!}{a(a-1)\dots(a-(b-1))} = \frac{b!(a-b)!}{b a!} \\ &= \frac{1}{b \binom{a}{b}}. \end{aligned}$$

Ce résultat reste vrai si $b = 1$ et $a \geq 1$ d'après la question précédente.

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}.$$

A.I.2.

A.I.2.a) Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $y \in]0, 1[$. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{a-1} \binom{a-1}{k} y^k (1-x)^{a-1-k} x^k \right) dx = \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} \int_0^1 (1-x)^{a-k} x^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a). \end{aligned}$$

A.I.2.b) Mais on a aussi

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx = \int_0^1 (1+x(y-1))^{a-1} dx = \left[\frac{(1+x(y-1))^a}{a(y-1)} \right]_0^1 = \frac{1}{a} \times \frac{1-y^a}{1-y}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{a-1} y^k = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a y^{k-1}.$$

A.I.2.c) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $\forall y \in]0, 1[$, $\sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a y^{k-1}$. Ainsi, les polynômes $t \mapsto \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} t^{k-1} I(k, a)$ et $t \mapsto \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a t^{k-1}$ coïncident en une infinité de valeurs de la variable. On en déduit que ces polynômes sont égaux et donc ces polynômes ont les mêmes coefficients. Par suite, $\forall k \in \llbracket 1, a \rrbracket$, $\binom{a-1}{k-1} I(k, a) = \frac{1}{a}$. Ainsi, si a et b sont deux entiers naturels tels que $1 \leq a \leq b$,

$$I(b, a) = \frac{1}{a \binom{a-1}{b-1}} = \frac{1}{a \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}} = \frac{1}{b \frac{a!}{b!(a-b)!}} = \frac{1}{b \binom{a}{b}}.$$

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}} = \frac{1}{a \binom{a-1}{b-1}}.$$

A.I.3.

A.I.3.a) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leq b \leq a$. En développant $(1-x)^{a-b}$ par la formule du binôme de NEWTON, on obtient

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \int_0^1 x^{b-1+k} dx = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}.$$

A.I.3.b) Par suite,

$$I(b, a) \Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{\Delta_a}{k+b}.$$

Pour chaque $k \in \llbracket 0, a-b \rrbracket$, $k+b \in \{b, \dots, a\} \subset \{1, \dots, a\}$. Par suite, pour chaque $k \in \llbracket 0, a-b \rrbracket$, Δ_a est un multiple de $k+b$ et donc $\frac{\Delta_a}{k+b}$ est un entier. Mais alors $I(b, a) \Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{\Delta_a}{k+b}$ est un entier relatif et finalement un entier naturel non nul car $I(b, a) \Delta_a = \frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} > 0$.

A.I.3.c) Ainsi, $\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} \in \mathbb{N}^*$ ou encore l'entier $b \binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a .

A.I.4.

A.I.4.a) Soit $k \geq 1$. On sait que les multiples communs à $1, 2, \dots, k$ sont les multiples du PPCM de $1, 2, \dots, k$ à savoir Δ_k . Comme Δ_{k+1} est un multiple commun à $1, 2, \dots, k$, Δ_{k+1} est un multiple de Δ_k .

Soit $n \geq 1$. D'après la A.I.3.c), $n \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} et d'après la remarque précédente, Δ_{2n} divise Δ_{2n+1} . Donc $n \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} . Ensuite, d'après la question A.I.3.c) appliquée à $a = 2n+1$ et $b = n+1$, on a directement $(2n+1) \binom{2n}{n} = (n+1) \binom{2n+1}{n+1}$ divise Δ_{2n+1} .

A.I.4.b) Puisque $1 \times (2n+1) + (-2) \times n = 1$, le théorème de BÉZOUT permet d'affirmer que les entiers n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

D'après la question précédente, $\frac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ est un entier, multiple des entiers n et $2n + 1$. Mais alors l'entier $\frac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ est multiple du PPCM de n et $2n + 1$ à savoir $n(2n + 1)$ puisque n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. Finalement, Δ_{2n+1} est un multiple de $n(2n + 1)\binom{2n}{n}$.

A.I.4.c) Soit $n \geq 1$. Pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,

$$\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} \cdot \frac{k!(2n-k)!}{(2n)!} = \frac{2n-k}{k+1} = \frac{2n+1}{k+1} - 1 \geq \frac{2n+1}{n-1+1} - 1 = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

et donc $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. Ainsi, $\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \dots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}$ et en particulier, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

D'autre part, pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leq \binom{2n}{n}$ car $2n-k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.}$$

A.I.4.d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

A.I.4.e) D'après la question A.I.4.b), $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} et en particulier, $\Delta_{2n+1} \geq n(2n+1)\binom{2n}{n} \geq n4^n$.

A.I.4.f) Soit $n \geq 9$.

• Si n est impair, il existe $k \geq 4$ tel que $n = 2k + 1$. D'après la question précédente,

$$\Delta_n = \Delta_{2k+1} \geq k4^k = k2^{2k} = k2^{n-1} \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

• Si n est pair, il existe $k \geq 5$ tel que $n = 2k$. D'après la question précédente,

$$\Delta_n = \Delta_{2k} \geq \Delta_{2k-1} \geq (k-1)4^{k-1} = (k-1)2^{2k-2} = (k-1)2^{n-2} \geq 4 \times 2^{n-2} = 2^n.$$

Donc, $\forall n \geq 9$, $\Delta_n \geq 2^n$. Ensuite,

$$\Delta_7 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \times 3, 7) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420 \geq 128 = 2^7,$$

et

$$\Delta_8 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \times 3, 7, 2^3) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840 \geq 256 = 2^8,$$

$$\boxed{\forall n \geq 7, \Delta_n \geq 2^n.}$$

A.I.5.

A.I.5.a) Soient $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{P}$. On sait que $v_p(\Delta_n) = \text{Max}\{v_p(k), 1 \leq k \leq n\}$. Soit $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k_0)$. Alors $p^{v_p(k_0)}$ divise k_0 (même si p n'est pas un facteur premier de k_0 car dans ce cas, $p^{v_p(k_0)} = 1$). En particulier, $p^{v_p(\Delta_n)} = p^{v_p(k_0)} \leq k_0 \leq n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathcal{P}, p^{v_p(\Delta_n)} \leq n.}$$

A.I.5.b) Soient $n \geq 2$ et $p \in \mathcal{P}$. Si $p > n$, p n'est diviseur premier d'aucun des entiers $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et donc n'est pas un diviseur premier de Δ_n . Par suite, $p^{v_p(\Delta_n)} = 1$. Donc

$$\Delta_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(\Delta_n)} = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}.$$

Le résultat reste vrai si $n = 1$ car les deux membres sont égaux à 1.

A.I.5.c) Soit $n \geq 1$. Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est $\pi(n)$.

Donc $\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)} \leq \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{\pi(n)} = n^{\pi(n)}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq n^{\pi(n)}.$$

A.I.6.

A.I.6.a) Soit $n \geq 7$. D'après les questions A.I.5.b) et A.I.4.f), $n^{\pi(n)} \geq \Delta_n \geq 2^n$ et donc $\pi(n) \ln n \geq n \ln 2$ puis $\pi(n) \geq (\ln 2) \frac{n}{\ln n}$.

$$\forall n \geq 7, \pi(n) \geq (\ln 2) \frac{n}{\ln n}.$$

A.I.6.b) $\pi(6) = 3$ et $(\ln 2) \frac{6}{\ln 6} = 2,3 \dots$ Donc $\pi(6) \geq (\ln 2) \frac{6}{\ln 6}$.

$\pi(5) = 3$ et $(\ln 2) \frac{5}{\ln 5} = 2,1 \dots$ Donc $\pi(5) \geq (\ln 2) \frac{5}{\ln 5}$.

$\pi(4) = 2$ et $(\ln 2) \frac{4}{\ln 4} = 2$. Donc $\pi(4) \geq (\ln 2) \frac{4}{\ln 4}$.

$\pi(3) = 2$ et $(\ln 2) \frac{3}{\ln 3} = 1,8 \dots$ Donc $\pi(3) \geq (\ln 2) \frac{3}{\ln 3}$.

$\pi(2) = 1$ et $(\ln 2) \frac{2}{\ln 2} = 2$. Donc $\pi(2) < (\ln 2) \frac{2}{\ln 2}$.

$$\forall n \geq 3, \pi(n) \geq (\ln 2) \frac{n}{\ln n}.$$

II - Une majoration de la fonction π

A.II.1.

A.II.1.a) Soient a et b deux entiers naturel tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$.

Puisque $\frac{b}{2} \leq a$, on a encore $b - a \leq a$ et donc le produit $b(b-1) \dots (b-a+1)$ est divisible par chacun des nombres

premiers p tels que $a < p \leq b$ puis le produit $b(b-1) \dots (b-a+1)$ est divisible par $\prod_{a < p \leq b} p$.

Ensuite, le produit $b(b-1) \dots (b-a+1)$ est divisible par $a!$ car $b(b-1) \dots (b-a+1) = a! \times \binom{b}{a}$.

Enfin, $a!$ n'est divisible par aucun nombre premier strictement supérieur à a et donc $a!$ est premier à un tel nombre premier. Par suite, $a!$ et $\prod_{a < p \leq b} p$ sont premiers entre eux.

Mais alors $b(b-1) \dots (b-a+1)$ est divisible par le PPCM de $a!$ et $\prod_{a < p \leq b} p$ à savoir $a! \prod_{a < p \leq b} p$ puisque ces deux entiers

sont premiers entre eux. Par suite, $\frac{\binom{b}{a}}{\prod_{a < p \leq b} p} = \frac{b(b-1) \dots (b-a+1)}{a! \prod_{a < p \leq b} p}$ est un entier naturel ou encore

$$\prod_{a < p \leq b} p \text{ divise } \binom{b}{a}.$$

A.II.1.b) Soit $m \geq 1$. Posons $a = m + 1$ et $b = 2m + 1$. Alors $b - a = m > 0$ et $a - \frac{b}{2} = m + 1 - m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. La

question précédente permet alors d'affirmer que $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.c) Soit $m \geq 1$. $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{(2m+1)-(m+1)} = \binom{2m+1}{m}$.

A.II.1.d) Soit $m \geq 1$.

$$2 \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = (1+1)^{2m+1} = 2^{2m+1},$$

et donc $\binom{2m+1}{m+1} \leq 2^{2m} = 4^m$.

A.II.1.e) Soit $m \geq 1$.

L'entier $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$ et en particulier $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m+1} \leq 4^m$.

$$\forall m \geq 1, \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m.$$

A.II.1.f) • $\prod_{p \leq 1} p$ est un produit vide et donc est égal à 1. Par suite, $\prod_{p \leq n} p \leq 4 = 4^1$. D'autre part, $\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 16 = 4^2$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\forall k \in [1, 2n]$, $\prod_{p \leq k} p \leq 4^k$. Alors, par hypothèse de récurrence et d'après la question précédente

$$\prod_{p \leq 2n+1} p = \left(\prod_{p \leq n+1} p \right) \times \left(\prod_{n+1 < p \leq 2n+1} p \right) \leq 4^{n+1} \times 4^n = 4^{2n+1}.$$

Enfin, $2n+2$ est un entier pair supérieur ou égal à 4 et en particulier $2n+2$ n'est pas premier. On en déduit que

$$\prod_{p \leq 2n+2} p = \prod_{p \leq 2n+1} p \leq 4^{2n+1} \leq 4^{2n+2}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\forall n \geq 1, \prod_{p \leq n} p \leq 4^n.$$

A.II.2.

A.II.2.a) Soit $m \geq 1$. $e^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k}{k!} \geq \frac{m^m}{m!}$ et donc $m! > \frac{m^m}{e^m} = \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

A.II.2.b) Soit $n \geq 2$. Notons $p_1 = 2, \dots, p_{\pi(n)}$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et rangés dans l'ordre croissant. On a immédiatement par récurrence : $\forall k \in [1, \pi(n)]$, $p_k \geq k$ et donc d'après la question B.II.1.f),

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} < \pi(n)! = \prod_{k=1}^{\pi(n)} k \leq \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k = \prod_{p \leq n} p \leq 4^n,$$

puis par stricte croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$, $\pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) = \ln \left(\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \right) < \ln(4^n) = n \ln 4$.

$$\forall n \geq 2, \pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) \leq n \ln 4.$$

A.II.3.

A.II.3.a) La fonction $f : x \mapsto x \ln x - x$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$, $f'(x) = \ln x$. Pour $x > 1$, on a $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Maintenant, classiquement $n_0 \geq \ln n_0$ et donc $e \frac{n_0}{\ln n_0} \geq 1$.

On en déduit que $f\left(e \frac{n_0}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \leq n_0 \ln 4$. Or,

$$f\left(e \frac{n_0}{\ln n_0}\right) = e \frac{n_0}{\ln n_0} \ln \left(e \frac{n_0}{\ln n_0}\right) - e \frac{n_0}{\ln n_0} = e \frac{n_0}{\ln n_0} \ln \left(\frac{n_0}{\ln n_0}\right) = e n_0 \left(1 - \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}\right),$$

et donc $e n_0 \left(1 - \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}\right) < n_0 \ln 4$ puis $1 - \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0} < \frac{\ln 4}{e}$ et enfin $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0}$.

A.II.3.b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. La fonction f' est positive sur $[1, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$. On en déduit que la fonction f admet un maximum en e égal à $f(e) = \frac{1}{e}$. Ainsi,

$$\forall x \geq 1, \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}.$$

En particulier, (puisque $\ln n_0 \geq \ln 3 \geq 1$), $\frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0} \leq \frac{1}{e}$ puis $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{1}{e}$ et finalement $e < 1 + \ln 4$. Puisque $e = 2,7\dots$ et $1 + \ln 4 = 2,3\dots$, on aboutit à une contradiction. Donc $\forall n \geq 3, \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}$.

$$\forall n \geq 3, \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}.$$

B - AUTOUR D'UN THÉORÈME DE MERTENS

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de n!

B.I.1. Soit k un entier naturel $p^k > n \Leftrightarrow k > \log_p n \Leftrightarrow k \geq \lceil \log_p n \rceil + 1$ (même si $\log_p n$ est un entier). Donc k_0 existe et

$$k_0 = \lceil \log_p n \rceil + 1.$$

De plus, puisque $p^0 = 1 \leq n$, on a $k_0 \geq 1$.

B.I.2.

B.I.2.a) Soit $k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket$. Pour $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$a \in \mathcal{U}_{k+1} \Rightarrow p^{k+1} \text{ divise } a \Rightarrow p^k \text{ divise } a \Rightarrow a \in \mathcal{U}_k.$$

Donc $\forall k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket, \mathcal{U}_{k+1} \subset \mathcal{U}_k$. De plus, puisque $k \leq k_0 - 1$, on a $1 \leq p^k \leq n$. Mais alors $p^k \in \mathcal{U}_k$. D'autre part, p^{k+1} ne divise pas p^k et donc $p^k \notin \mathcal{U}_{k+1}$. Finalement $\forall k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket, \mathcal{U}_{k+1} \subsetneq \mathcal{U}_k$.

Soit $k \geq k_0$. Alors $p^k \geq p^{k_0} > n$ et donc $\forall a \in \llbracket 1, n \rrbracket, p^k > a$. En particulier, p^k ne divise aucun des entiers a tels que $1 \leq a \leq n$ et donc \mathcal{U}_k est vide.

B.I.2.b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $V_k = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{U}_k$. On déduit alors de la question précédente que si $k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket, V_k \subsetneq V_{k+1}$ et si $k \geq k_0, V_k = \llbracket 1, n \rrbracket$.

B.I.2.c) Un facteur premier de $n!$ est un diviseur premier de l'un des entiers a tels que $1 \leq a \leq n$.

Si $a = 1, v_p(a)$ n'est pas définie et on prendra $v_p(a) = 0$ ce qui est cohérent avec la notation $1 = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(1)}$. Ainsi, l'entier

$a = 1$ est dans Ω_0 et dans aucun autre $\Omega_k, k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $a \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Puisque $v_p(a)$ est uniquement défini, a est dans exactement un $\Omega_k, k \in \mathbb{N}$. Maintenant, si $k \geq k_0, p^k > n \geq a$ et donc $k \neq v_p(a)$. Par suite, a est dans exactement un $\Omega_k, k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket$. Enfin, chaque $\Omega_k, 0 \leq k \leq k_0 - 1$, est non vide car $\forall k \in \llbracket 0, k_0 - 1 \rrbracket, \Omega_k = \mathcal{U}_k \setminus \mathcal{U}_{k+1}$ avec $\mathcal{U}_{k+1} \subsetneq \mathcal{U}_k$. On a montré que $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{k_0-1}\}$ est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

B.I.3.

B.I.3.a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après une propriété admise dans le préambule,

$$a \in \Omega_k \Leftrightarrow v_p(a) = k \Leftrightarrow p^k \text{ divise } a \text{ et } p^{k+1} \text{ ne divise pas } a \Leftrightarrow a \in \mathcal{U}_k \text{ et } a \in V_{k+1} \Leftrightarrow a \in \mathcal{U}_k \cap V_{k+1}.$$

Donc $\Omega_k = \mathcal{U}_k \cap V_{k+1}$.

B.I.3.b) Soit $k \in \mathbb{N}$. \mathcal{U}_k est l'ensemble des multiples de p^k qui sont éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et donc

$$\#\mathcal{U}_k = \#\{q \in \mathbb{N} / 1 \leq qp^k \leq n\}.$$

Maintenant, pour $q \in \mathbb{N}, 1 \leq qp^k \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leq q \leq \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Donc $\#\mathcal{U}_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ puis $\#V_k = n - \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Enfin, puisque $\mathcal{U}_{k+1} \subset \mathcal{U}_k, \#\Omega_k = \#\mathcal{U}_k - \#\mathcal{U}_{k+1} = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$.

B.I.4. D'après une propriété admise dans le préambule,

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= v_p \left(\prod_{a=1}^n a \right) = \sum_{a=1}^n v_p(a) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(\sum_{a \in \Omega_k} v_p(a) \right) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(k \sum_{a \in \Omega_k} 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} k \#\Omega_k = \sum_{k \geq 0} k \#\Omega_k. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$ pour $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k \geq 0} k \left(\left[\frac{n}{p^k} \right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}} \right] \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} k \left[\frac{n}{p^k} \right] - \sum_{k \geq 0} k \left[\frac{n}{p^{k+1}} \right] \quad (\text{les sommes sont finies}) \\ &= \sum_{k \geq 1} k \left[\frac{n}{p^k} \right] - \sum_{k \geq 1} (k-1) \left[\frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]. \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 2, \forall p \in \mathcal{P}, v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right].$$

II. Un théorème de Mertens

B.II.1. Soient $n \geq 2$ et $p \in \mathcal{P}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\left[\frac{n}{p^k} \right] \leq \frac{n}{p^k}$ et donc, puisque $0 < \frac{1}{p} < 1$,

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] \leq \sum_{k \geq 1} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p} \times \frac{p}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{p-1+1}{p-1} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

D'autre part, $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] \geq \left[\frac{n}{p} \right] > \frac{n}{p} - 1$.

B.II.2. Soit $n \geq 2$. On a vu que si $p > n$, p n'est pas un facteur premier de $n!$ et donc $v_p(n!) = 0$.

Donc $n! = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n!)} = \prod_{p \leq n} p^{v_p(n!)}$ puis $\ln(n!) = \sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln p$.

D'après la question précédente, $\sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln p \leq \sum_{p \leq n} \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \right) \ln p = n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$ et aussi

$\sum_{p \leq n} v_p(n!) \ln p > \sum_{p \leq n} \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \ln p = n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - n \sum_{p \leq n} \ln p$ (il y a au moins une inégalité stricte puisque la somme contient le terme correspondant à $p = 2$ avec $\ln 2 > 0$).

$$\forall n \geq 2, n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leq n} \ln p < \ln(n!) \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)}.$$

B.II.3.

B.II.3.a) D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{r}{2^r} \underset{r \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ et donc la série de terme général $\frac{r}{2^r}$, $r \geq 1$,

converge. Posons alors $S = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r}$.

$$2S = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^{r-1}} = 1 + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{r}{2^{r-1}} = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r+1}{2^r} = 1 + S + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + S,$$

et donc $S = 2$.

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2.$$

B.II.3.b) Soit $r \geq 1$.

$$\sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^r} \quad (\text{somme télescopique}).$$

On en déduit que $U_r \leq \ln(2^r) \sum_{2^{r-1} < m \leq 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{r \ln 2}{2^r}$.

B.II.3.c) Pour tout entier $r \geq 1$, $0 \leq U_r \leq \frac{r \ln 2}{2^r}$. Mais d'après la question B.II.3.a), la série de terme général $\frac{r \ln 2}{2^r}$, $r \geq 1$, converge. Il en est de même de la série de terme général U_r et de plus, $\sum_{r=1}^{+\infty} U_r \leq \ln 2 \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2 \ln 2 = \ln 4$.

$$\sum_{r=1}^{+\infty} U_r \leq \ln 4.$$

B.II.3.d) D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{\ln m}{m(m-1)} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)$. Donc la série de terme général $\frac{\ln m}{m(m-1)}$, $m \geq 2$, converge. Puisque la suite $\left(\sum_{m=2}^n \frac{\ln m}{m(m-1)}\right)_{n \geq 2}$ converge, la suite extraite $\left(\sum_{m=2}^{2^n} \frac{\ln m}{m(m-1)}\right)_{n \geq 1}$ converge et a même limite. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^{2^n} \frac{\ln m}{m(m-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=1}^n \left(\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=1}^n U_r = \sum_{r=1}^{+\infty} U_r \\ &\leq \ln 4 \end{aligned}$$

B.II.3.e) Soit $u \in [0, +\infty[$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 appliquée à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur l'intervalle $[0, u]$ fournit

$$\ln(1+u) = \ln 1 + \frac{u}{1+0} + \int_0^u \frac{(u-t)}{1!} \times -\frac{1}{(1+t)^2} dt = u - \int_0^u \frac{u-t}{(1+t)^2} dt \leq u.$$

La même formule à l'ordre 3 fournit

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2!} \times \frac{2}{(1+t)^3} dt = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{(1+t)^3} dt \geq u - \frac{u^2}{2}.$$

En résumé, $\forall u \geq 0$, $u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ ou encore $1 - \frac{1}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$. De plus, pour $n \geq 1$, $n^2 \geq n$ et donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$.

Remarque. Seuls les $u \in]0, 1[$ sont utilisés. Pour un tel u , l'égalité $\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k}$ et les inégalités classiques sur les sommes de séries alternées fournissent immédiatement $u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$.

B.II.3.f) • Pour $n = 2$, $\frac{\ln(2!) - (2 \ln 2 - 2 + 1)}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - 1 = 0,4\dots$. Ainsi, le réel $\theta_2 = \frac{\ln(2!) - (2 \ln 2 - 2 + 1)}{\ln 2}$ est élément de $[0, 1]$ et vérifie $\ln(2!) = 2 \ln 2 - 2 + 1 + \theta_2 \ln 2$.

• Soit $n \geq 2$. Supposons qu'il existe $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$.

Soit $\theta_{n+1} = \frac{\ln((n+1)!) - ((n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1)}{\ln(n+1)}$. On a

$$\begin{aligned} \ln((n+1)!) - ((n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1) &= \ln(n!) - n \ln(n+1) + n \\ &= n \ln n - n + 1 + \theta_n \ln n - n \ln(n+1) + n \\ &= 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \theta_n \ln(n+1) - \theta_n (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \theta_n \ln(n+1) - \theta_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \theta_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)} \geq \theta_n + \frac{0 - \theta_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)} = \theta_n \left(1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}\right) \\ &\geq \theta_n \left(1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\ln(3)}\right) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \theta_n \geq 0, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \theta_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)} \\ &\leq \theta_n + \frac{\frac{1}{2n} - \frac{\theta_n}{2n}}{\ln(n+1)} = \theta_n \left(1 - \frac{1}{2n \ln(n+1)}\right) + \frac{1}{2n \ln(n+1)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{2n \ln(n+1)} + \frac{1}{2n \ln(n+1)} \text{ (car } \frac{1}{2n \ln(n+1)} \leq \frac{1}{2 \ln 3} \leq 1 \text{ et donc } 1 - \frac{1}{2n \ln(n+1)} \geq 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

B.II.4. D'après la question B.II.3.d), $\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \ln 4$ et d'après la question B.II.3.f), $\ln(n!) \geq n \ln n - n + 1$. La question B.II.2) permet alors d'écrire

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} < n \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + n \ln 4,$$

et donc $\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} > \ln n - 1 - \ln 4 + \frac{1}{n} > \ln n - (1 + \ln 4)$.

B.II.5. De même,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} &< \frac{1}{n} \left(\ln(n!) + \sum_{p \leq n} \ln p \right) \text{ (d'après II.B.2))} \\ &= \frac{1}{n} \left(\ln(n!) + \ln \left(\prod_{p \leq n} p \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{n} (n \ln n - n + 1 + \ln n + \ln(4^n)) \text{ (d'après A.II.1.f) et B.II.3.f))} \\ &= \ln n + \ln 4 - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} \\ &\leq \ln n + \ln 4 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \text{ (d'après A.II.3.b))} \\ &< \ln n + \ln 4. \end{aligned}$$

En résumé, pour $n \geq 2$, $-1 - \ln 4 < \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \ln n < \ln 4$. Ainsi, la suite, $\left(\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} - \ln n \right)_{n \geq 2}$ est bornée ou encore

$$\boxed{\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).}$$

III. Le comportement asymptotique de $\left(\sum_{p \leq n} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1.

B.III.1.a) La fonction $t \mapsto t \ln^2 t$ est strictement positive et croissante sur $]1, +\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1, +\infty[$). Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Pour $k \geq 3$, on a alors

$$\frac{1}{k \ln^2 k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln^2 t} dt \text{ puis, pour } n \geq 3,$$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln^2 t} dt = \int_2^n \frac{1}{t \ln^2 t} dt \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t} dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

puis pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$. Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs de terme général $\frac{1}{n \ln^2 n}$, $n \geq 2$, est majorée et donc cette série converge.

De même, pour $k \geq 3$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln t} dt$ puis pour $n \geq 4$,

$$\int_3^n \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \leq \int_2^{n-1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln t} dt.$$

On en déduit que pour $n \geq 4$, $\ln \ln n - \ln \ln 3 + \frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \leq \ln \ln n - \ln \ln 2 + \frac{1}{\ln 2}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \ln n = +\infty$,

la minoration précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = +\infty$ et donc la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, diverge.

L'encadrement montre quant à lui que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n\right)$ est bornée et donc que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1).$$

B.III.1.b) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n \ln n} - \ln \ln(n+1) + \ln \ln n = \frac{1}{n \ln n} - \ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \frac{1}{n \ln n} - \ln \left(\frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) \\ &= \frac{1}{n \ln n} - \ln \left(1 + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}\right) = \frac{1}{n \ln n} - \left(\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{2n^2 \ln n} + o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2 \ln n} + o\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right). \end{aligned}$$

B.III.1.c) On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \geq 3$, sont de même nature. Puisque $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \geq 3$, converge et il en est de même de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

Donc il existe un réel ℓ tel que $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$ ou encore tel que $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln \ln n + \ell + o(1)$.

B.III.2.

B.III.2.a) Soit $n \geq 3$. On note δ la fonction caractéristique de \mathcal{P} . En remarquant que $\psi(n) = \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(k) \ln k}{k}$, une transformation d'ABEL fournit

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=1}^n \frac{\delta(k) \ln k}{k} \times \frac{1}{\ln k} = \frac{\psi(n)}{\ln n} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \left(\frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln k \ln(k+1)} \right) + \frac{\psi(n)}{\ln n} = \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{\ln n} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{\ln n} \quad (\text{car } \psi(1) = 0).
\end{aligned}$$

B.III.2.b) D'après le théorème de MERTENS (B.II.5)

$$\begin{aligned}
\psi(k) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} &= (\ln k + O(1)) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln(k+1)} + O \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} \right) \\
&= \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln(k+1)} + O \left(\frac{1}{k \ln^2 k} \right) \quad (\text{car } \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} \sim \frac{1}{k \ln^2 k}) \\
&= \frac{1}{\ln k} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k}} + O \left(\frac{1}{k \ln^2 k} \right) \\
&= \frac{1}{\ln k} \left(\frac{1}{k} + O \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{k \ln k} \right) \right) = \frac{1}{\ln k} \left(\frac{1}{k} + O \left(\frac{1}{k \ln k} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln k} \right) \right) \\
&= \frac{1}{k \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right).
\end{aligned}$$

B.III.3. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} &= \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\ln k \ln(k+1)} + \frac{\psi(n)}{\ln n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} + \sum_{k=1}^{n-1} O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) + \frac{\ln n + O(1)}{\ln n} = \ln \ln n + \ell + o(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) + o(1) + 1 + o(1) \\
&= \ln \ln n + \lambda + o(1) \quad \text{où } \lambda = \ell + \sum_{k=1}^{+\infty} O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) + 1.
\end{aligned}$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln \ln n + \lambda + o(1)$.

B.III.4. On effectue de nouveau une transformation d'ABEL en notant que pour $n \geq 1$, $\pi(n) = \sum_{k=1}^n \delta(k)$ (où δ désigne toujours la fonction caractéristique de \mathcal{P}). Pour $n \geq 2$,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(k)}{k} = \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \pi(k) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}.$$

Si maintenant il existe $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c \frac{n}{\ln n}$, alors $\frac{\pi(k)}{k(k+1)} \sim \frac{c}{k \ln k}$. Comme $\frac{1}{k \ln k} > 0$ et que la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$ diverge, un théorème de sommation des relations de comparaison permet d'affirmer que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c}{k \ln k} \sim c \ln \ln n \quad (\text{d'après la question B.III.1.c}).$$

Ainsi, s'il existe $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c \frac{n}{\ln n}$, alors $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c \ln \ln n$. Comme d'autre part, $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \ln n$, on en déduit que $c = 1$.

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

B.IV.1. D'après la question B.III.3,

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} &= \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln \ln n + \lambda + o(1) - \ln \ln \sqrt{n} - \lambda + o(1) \\ &= \ln \ln n - \ln \left(\frac{1}{2} \ln n \right) + o(1) = \ln 2 + o(1). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \frac{1}{p} = \ln 2.$$

B.IV.2.

B.IV.2.a) Si $p > m$, un éventuel facteur premier de n distinct de p est un facteur premier de m et est donc strictement inférieur à p . Donc $p = P^+(n)$. Ensuite, $\sqrt{n} = \sqrt{mp} < \sqrt{p^2} = p$ et donc $n \in A$. Enfin, si $p \leq \frac{x}{m}$, alors $n = mp \leq x$ et donc $n \in A(x)$.

Réciproquement, supposons que $p = P^+(n)$ et $n \in A(x)$. Alors, $mp \leq x$ puis $p \leq \frac{x}{m}$. D'autre part, puisque $n \in A$ et que $p = P^+(n)$, $p > \sqrt{n} = \sqrt{mp}$ puis $p^2 > mp$ et finalement $p > m$.

On a montré que $(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)) \Leftrightarrow m < p \leq \frac{x}{m}$.

B.IV.2.b) Si on pose $n = mp = m'p'$, la question précédente montre que $p = P^+(n) = p'$ puis $m = \frac{n}{p} = m'$.

B.IV.2.c) D'après la question a), les éléments de $A(x)$ sont les entiers de la forme mp où p est un nombre premier et m est un entier tel que $m < p \leq \frac{x}{m}$ et d'après b), pour chaque entier n de $A(x)$, il existe au plus un couple (m, p) tel que p est premier, $n = mp$ et $m < p \leq \frac{x}{m}$. D'où le résultat.

B.IV.2.d) Soit $x \geq 2$. D'après ce qui précède, $a(x)$ est le nombre de couples (m, p) où p est un nombre premier et m est un entier naturel non nul tel que $m < p \leq \frac{x}{m}$. Maintenant, si p est un nombre premier donné, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$m < p \leq \frac{x}{m} \Leftrightarrow m < p \text{ et } m \leq \frac{x}{p} \Leftrightarrow m \leq p - 1 \text{ et } m \leq \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \Leftrightarrow m \leq \min \left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right).$$

Ainsi, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, il y a $\min \left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right)$ entiers m tels que l'entier $n = mp$ soit dans $A(x)$. Donc

$$a(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \min \left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right) = \sum_{p \leq x} \min \left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right)$$

car si $p > x$, $\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = 0$.

$$\forall x \geq 2, a(x) = \sum_{p \leq x} \min \left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right).$$

B.IV.3.

B.IV.3.a) Soit $x \geq 1$. Puisque $p - 1$ est un entier,

$$\begin{aligned} p - 1 \leq \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor &\Leftrightarrow p - 1 \leq \frac{x}{p} \Leftrightarrow p^2 - p - x \leq 0 \Leftrightarrow \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} + x \\ &\Leftrightarrow p - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{1 + 4x}}{2} \Leftrightarrow p \leq \varphi(x). \end{aligned}$$

B.IV.3.b) Soit $x \geq 1$. $\varphi(x) > \frac{\sqrt{4x}}{2} = \sqrt{x}$ et $\varphi(x) < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{x} + 4x}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(1 + 2\sqrt{x})^2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x} + 1$.

$$\forall x \geq 1, \sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1.$$

B.IV.3.c) Soit $x \geq 1$. Puisque $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x} + 1$, il existe au plus un nombre premier p tel que $\sqrt{x} < p \leq \varphi(x)$. S'il n'existe pas de nombre premier dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$, l'inégalité $p \leq \varphi(x)$ est équivalente à l'inégalité $p \leq \sqrt{x}$.

D'après la question B.IV.3.a), si $p \leq \sqrt{x}$, $\min\left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right) = p - 1$ et si $\sqrt{x} < p \leq x$, $\min\left(p - 1, \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$.

Dans ce cas, $a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$.

S'il existe un nombre premier p_0 dans $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$, alors $a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + (p_0 - 1) + \sum_{\varphi(x) < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$. Il s'agit alors de

vérifier que $\left\lfloor \frac{x}{p_0} \right\rfloor = p_0 - 1$.

• $\frac{x}{p_0} < \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} < p_0$ et donc $\left\lfloor \frac{x}{p_0} \right\rfloor \leq p_0 - 1$.

• $X_1 = \varphi(x)$ est solution de l'équation $X^2 - X - x = 0$. L'autre solution X_2 vérifie $X_2 \varphi(x) = -x$ et $X_2 + \varphi(x) = 1$. Par suite $\frac{x}{\varphi(x)} = -X_2 = \varphi(x) - 1$. Mais alors $\frac{x}{p_0} \geq \frac{x}{\varphi(x)} = \varphi(x) - 1 \geq p_0 - 1$ et donc $\left\lfloor \frac{x}{p_0} \right\rfloor \geq p_0 - 1$.

Finalement, on a de nouveau $a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \left\lfloor \frac{x}{p_0} \right\rfloor + \sum_{\varphi(x) < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$.

$$\forall x \geq 1, a(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor.$$

B.IV.3.d) Soit $x \geq 9$ (de sorte que $[\sqrt{x}] \geq 3$). D'après la question A.II.3,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) &= \sum_{p \leq \sqrt{x}} p - \pi([\sqrt{x}]) \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} [\sqrt{x}] - \pi([\sqrt{x}]) = \pi([\sqrt{x}]) ([\sqrt{x}] - 1) \\ &\leq e^{\frac{[\sqrt{x}]}{\ln [\sqrt{x}]}} \sqrt{x} \leq e^{\frac{x}{\ln [\sqrt{x}]}}. \end{aligned}$$

Par suite, pour $x \geq 9$, $0 \leq \frac{1}{x} \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) \leq \frac{e}{\ln [\sqrt{x}]}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) = 0$ et donc que

$$\frac{1}{x} \sum_{p \leq \sqrt{x}} (p - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

B.IV.3.e) Soit $x \geq 9$. On a $\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left(\frac{x}{p} - 1\right) \leq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{x}{p}$ avec $\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} 1 = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \leq \pi(x)$. Donc

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} - \frac{\pi}{x} \leq \frac{1}{x} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p}.$$

Maintenant, d'après la question B.IV.1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p} = \ln 2$ et d'après la question A.II.3, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$. On en

déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \ln 2$ ou encore que $\sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \ln 2 + o(x)$.

B.IV.3.f) D'après les questions précédentes, $a(x) = o(x) + x \ln 2 + o(x)$ et donc $\frac{a(x)}{x} = \ln 2 + o(1)$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(n)}{n} = \ln 2.$$