

*I - Intégrales de Wallis et formule de Stirling***I.1. Intégrales de Wallis.**

I.1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est un C^1 -difféomorphisme de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même. En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, on obtient

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \, dt.$$

I.1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(x) - \cos^{n+1}(x) = \cos^n(x)(1 - \cos(x)) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \cos^n(x) - \cos^{n+1}(x)$ est continue, positive et non nulle sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos^n(x) - \cos^{n+1}(x)) \, dx > 0,$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} < W_n$ et donc

la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

I.1.c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \times \cos^{n+1}(x) \, dx = [\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \times (n+1)(-\sin(x)) \cos^n(x) \, dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^n(x) \, dx \quad (\text{car } n+1 \geq 1) \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \cos^n(x) \, dx = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x) \, dx \right) \\ &= (n+1) (W_n - W_{n+2}), \end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n.$$

I.1.d) $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx = [-\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{1}{2} W_0 = \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} W_1 = \frac{((2p) \times (2p-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

I.1.e) D'après la question I.1.c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+1} = (n+1)W_n$ puis, en multipliant les deux membres par W_{n+1} , $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. Ainsi, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. On en déduit que pour tout entier naturel n , $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$ et donc $W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

I.1.f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord $W_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). Ensuite, d'après la question I.1.b), $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$. En divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif W_n , on obtient (à l'aide de la question I.1.c))

$$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc que

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n.$$

I.1.g) D'après les questions question I.1.e), $\frac{\pi}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} = W_n W_{n+1} \sim W_n^2$, et puisque $W_n > 0$,

$$W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ et en particulier } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0.$$

I.2. Formule de Stirling.

I.2.a) Soit $n \geq 2$.

$$v_n = \ln(u_n - u_{n-1}) = \ln \left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \times \frac{(n-1)^{n-1} \sqrt{n-1}}{(n-1)!e^{n-1}} \right) = \ln \left(e \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Par suite,

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

I.2.b) En particulier, $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on en déduit que la série de terme général v_n , $n \geq 2$, converge absolument et donc converge.

Maintenant, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n (\ln(u_k) - \ln(u_{k-1})) = \ln(u_n) - \ln(u_1) = \ln(u_n) - 1$ (somme télescopique). Donc, $\forall n \geq 2$, $\ln(u_n) = 1 + v_n$ et la suite $(\ln(u_n))$ converge. Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n)$ puis $K = e^\ell > 0$.

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^l = K.$$

Puisque K n'est pas nul, on peut alors écrire $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K$ ou encore $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

I.2.c) D'après la question I.1.d),

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2p}}{2^{2p} K^2 \left(\frac{p}{e}\right)^{2p} (\sqrt{p})^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K\sqrt{2}\sqrt{p}}.$$

D'autre part, d'après la question I.1.g), $W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$ et on en déduit que $\frac{\pi}{K\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $K = \sqrt{2\pi}$.
Finalement,

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

I.3. Une autre application des intégrales de Wallis.

I.3.a) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}_n &\Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq R^2 \Leftrightarrow x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \leq R^2 \text{ et } x_n^2 \leq R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \\ &(\text{car } x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq R^2 \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2) \\ &\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_n \text{ et } x_n^2 \leq R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ \text{et} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , \mathcal{B}_n est continûment paramétrable.

- $\mathcal{B}_1 = [-R, R]$ est continûment paramétrable.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que \mathcal{B}_{n-1} soit continûment paramétrable. D'après ce qui précède,

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \text{ et } -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}\}.$$

Comme \mathcal{B}_{n-1} est continûment paramétrable par hypothèse de récurrence et que les deux fonctions $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$ sont continues sur \mathcal{B}_{n-1} (car la fonction $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$ est continue sur \mathcal{B}_{n-1} à valeurs dans \mathbb{R}^+ et la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est continue sur \mathbb{R}^+), on en déduit que \mathcal{B}_n est continûment paramétrable.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{B}_n \text{ est continûment paramétrable.}$$

I.3.b) Soient $\lambda > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi : t \mapsto \lambda \sin t$ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction $x \mapsto (\lambda^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue sur $\varphi\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-\lambda, \lambda]$. On peut donc poser $x = \varphi(t)$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{\frac{m}{2}} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 t)^{\frac{m}{2}} \lambda \cos t dt = \lambda^{m+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{\frac{m}{2}} \cos t dt \\ &= \lambda^{m+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m+1} t dt \\ &= 2\lambda^{m+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{m+1} t dt \text{ (car la fonction } t \mapsto \cos t \text{ est paire)} \\ &= 2\lambda^{m+1} W_{m+1}. \end{aligned}$$

I.3.c) Soit $n \geq 2$.

- D'après la question I.3.a),

$$\begin{aligned}
V_n &= \int \dots \int_{\mathcal{B}_n} dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-1}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= 2 \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-1}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= 2W_1 \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-1}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}} dx_{n-1} \dots dx_1.
\end{aligned}$$

La formule proposée est donc vraie quand $k = 1$.

• Soit $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Supposons que $V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^k W_i \right) \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \dots dx_1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
&\int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \dots dx_1 \\
&= \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k-1}^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k-1}^2}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \right) dx_{n-k-1} \dots dx_1 \\
&= \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-k-1}} \left(2 \left(\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-k-1}^2} \right)^{k+1} W_{k+1} \right) dx_{n-k-1} \dots dx_1 \\
&= 2W_{k+1} \int_{\mathcal{B}_{n-(k+1)}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-(k+1)}^2)^{\frac{k+1}{2}} dx_{n-(k+1)} \dots dx_1,
\end{aligned}$$

et donc

$$V_n = 2^{k+1} \left(\prod_{i=1}^{k+1} W_i \right) \int \dots \int_{\mathcal{B}_{n-(k+1)}} (R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-(k+1)}^2)^{\frac{k+1}{2}} dx_{n-(k+1)} \dots dx_1.$$

Le résultat est démontré par récurrence sur k .

I.3.d) $V_1 = \int_{-R}^R dx_1 = 2R = W_1 \times (2R)^1$.

Soit alors $n \geq 2$. Le résultat de la question précédente appliqué à $k = n-1$ fournit

$$\begin{aligned}
V_n &= 2^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} W_i \right) \int_{-R}^R (R^2 - x_1^2)^{n-1} 2 dx_1 \\
&= 2^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} W_i \right) \times 2R^{n-1+1} W_{n-1+1} \text{ (d'après la question I.3.b)} \\
&= (2R)^n \left(\prod_{i=1}^n W_i \right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (2R)^n \left(\prod_{i=1}^n W_i \right).}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.1.e), $\forall i \in \mathbb{N}$, $W_i W_{i+1} = \frac{\pi}{2(i+1)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
V_{2k} &= (2R)^{2k} \left(\prod_{i=1}^{2k} W_i \right) = (2R)^{2k} \left(\prod_{p=1}^k W_{2p-1} W_{2p} \right) \\
&= (2R)^{2k} \left(\prod_{p=1}^k \frac{\pi}{2 \times (2p)} \right) = \frac{(2R)^{2k} \pi^k}{2^{2k} k!} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}.}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} V_{2k+1} &= \left(\prod_{i=1}^{2k+1} W_i \right) (2R)^{2k+1} = \left(\prod_{i=1}^{2k} W_i \right) (2R)^{2k} \times 2RW_{2k+1} \\ &= V_{2k} \times 2R \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \text{ (d'après la question I.1.d)} \\ &= \frac{\pi^k}{k!} R^k \times 2R \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}. \end{aligned}$$

En tenant compte de $V_1 = 2R$, on a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}.$$

Remarque. On pouvait aussi ne pas utiliser la question I.1.d) en écrivant

$$V_{2k+1} = \left(\prod_{i=2}^{2k+1} W_i \right) (2R)^{2k+1} = \left(\prod_{p=1}^k W_{2p} W_{2p+1} \right) (2R)^{2k+1}.$$

En particulier,

$$V_1 = 2R, V_2 = \pi R^2, V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ et } V_4 = \frac{\pi^2}{2} R^4.$$

I.3.e) D'après la formule de STIRLING,

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\pi R)^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}} = \exp\left(-k \ln k + k \ln(e\pi R) - \frac{1}{2} \ln k - \ln(\sqrt{2\pi})\right),$$

Comme, $\lim_{k \rightarrow +\infty} -k \ln k + k \ln(e\pi R) - \frac{1}{2} \ln k - \ln(\sqrt{2\pi}) = -\infty$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_{2k} = 0$.

Ensuite, d'après la question I.1.g),

$$V_{2k+1} = 2RW_{2k+1} V_{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2R \sqrt{\frac{\pi}{2(2k+1)}} V_{2k}$$

et comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(2k+1)}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} V_{2k} = 0$, on a encore $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_{2k+1} = 0$.

I.3.f) Les deux suites extraites (V_{2k}) et (V_{2k+1}) sont convergentes et ont même limite. On en déduit que la suite (V_n) converge et de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} V_{2k} = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0.$$

I.3.g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $V_n \neq 0$ puis d'après la question I.3.d),

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n+1} W_i \right) (2P)^{n+1}}{\left(\prod_{i=1}^n W_i \right) (2P)^n} = 2RW_n.$$

Puisque la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle, il en est de même de la suite $(2RW_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq n_1$, $0 < 2RW_n < 1$. Soit $n_0 = \text{Min}\{n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, 0 < 2RW_n < 1\}$ (n_0 existe car $\{n_1 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_1, 0 < 2RW_n < 1\}$ est une partie non vide de \mathbb{N}). Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2RW_n < 1$ et donc, puisque $V_n > 0$, $V_{n+1} < V_n$. La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante à partir du rang n_0 .

Si $n_0 = 1$, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Sinon, $n_0 \geq 2$ puis $2RW_{n_0-1} \frac{V_{n_0}}{V_{n_0-1}} \geq 1$ par définition de n_0 . Mais alors, pour $1 \leq n \leq n_0 - 1$, puisque la suite $(2RW_n)$ est décroissante,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2RW_n \geq 2RW_{n_0-1} \geq 1,$$

et donc, pour $1 \leq n \leq n_0 - 1$, $V_{n+1} \geq V_n$.

En résumé, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit décroissante, soit croissante jusqu'à un certain rang n_0 puis décroissante.

I.3.h) Puisque la suite $\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante,

$$(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ décroissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} \leq 1 \Leftrightarrow 2RW_1 \leq 1 \Leftrightarrow R \leq \frac{1}{2}.$$

La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante si et seulement si $0 < R \leq \frac{1}{2}$.

I.3.i) Supposons $R = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \geq 1 \Leftrightarrow 2W_n \geq 1 \Leftrightarrow W_n \geq \frac{1}{2}.$$

Maintenant, d'après la question I.1.d),

$$W_5 = \frac{2^4 \times 2^2}{5!} = \frac{2^6}{120} = \frac{8}{15} \geq \frac{1}{2} \text{ et } W_6 = \frac{6!}{2^6 6^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2^6 2^2 3^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32} = 0,4\dots < \frac{1}{2}$$

Par suite, $\frac{V_6}{V_5} \geq 1$ et $\frac{V_7}{V_6} < 1$. Donc, si $R = 1$, alors $n_0 = 6$.

II - Polynômes et nombres de Bernoulli

II.1. Définitions.

II.1.a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme Q cherché est nécessairement une primitive du polynôme P .

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons donc $Q_0(x) = \int_0^x P(t) dt$ (Q_0 est la primitive de P qui s'annule en 0). Q_0 est un polynôme et les primitives de P sont les polynômes $Q = Q_0 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\int_0^1 Q(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (Q_0(t) + \lambda) dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = - \int_0^1 Q_0(t) dt.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'un polynôme Q vérifiant $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x) dx$ à savoir le polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x P(t) dt - \int_0^1 \left(\int_0^x P(t) dt \right) dx.$$

II.1.b) • B_0 existe, est un polynôme et est uniquement défini.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité du polynôme B_{n-1} . Alors, d'après la question précédente, il existe un polynôme B_n et un seul tel que $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$.

On a montré par récurrence l'existence et l'unicité de la suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.1.c) • $B_0(X) = 1$ et $b_0 = 1$.

• Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_1(X) = X + a$. De plus, $0 = \int_0^1 (x + a) dx = \frac{1}{2} + a$ et donc $a = -\frac{1}{2}$. Par suite $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et $b_1 = -\frac{1}{2}$.

• $B'_2(X) = 2B_1(X) = 2X - 1$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_2(X) = X^2 - X + a$. De plus, $0 = \int_0^1 (x^2 - x + a) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a$ et donc $a = \frac{1}{6}$. Par suite $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$.

• $B'_3(X) = 3B_2(X) = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + a$. De plus, $0 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + a \right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + a$ et donc $a = 0$. Par suite $B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ et $b_3 = 0$.

• $B'_4(X) = 4B_3(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2X$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 + a$. De plus, $0 = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2 + a) dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a$ et donc $a = -\frac{1}{30}$. Par suite $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$.

$$B_0(X) = 1, B_1(X) = X - \frac{1}{2}, B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}, B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \text{ et } B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}.$$

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0 \text{ et } b_4 = -\frac{1}{30}.$$

II.2. Premières propriétés.

II.2.a) B_0 est de degré 0 et si pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_{n-1} est de degré $n-1$, alors $B'_n = nB_{n-1}$ est de degré $n-1 \in \mathbb{N}$ puis B_n est de degré n . On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n \text{ est de degré } n.$$

II.2.b) Soit $n \geq 2$.

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x) dx = n \int_0^1 B_{n-1}(x) dx = 0 \text{ car } n-1 \geq 1.$$

$$\forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1).$$

II.2.c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note tout d'abord que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$ ce qui reste vrai pour $k=0$ puis $n=0$.

La formule de TAYLOR pour les polynômes permet alors d'écrire

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{B_{n-k}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

II.2.d) Soit $n \geq 1$. L'égalité $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$ fournit $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1} = 0$ et donc $b_n = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1}.$$

On retrouve

- $b_2 = -\left(2 \times \frac{b_1}{2} + \frac{b_0}{3}\right) = \frac{1}{6}$.
- $b_3 = -\left(3 \times \frac{b_2}{2} + 3 \times \frac{b_1}{3} + \frac{b_0}{4}\right) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$
- $b_4 = -\left(4 \times \frac{b_3}{2} + 6 \times \frac{b_2}{3} + 4 \times \frac{b_1}{4} + \frac{b_0}{5}\right) = -\left(0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{30}$

puis

- $b_5 = -\left(5 \times \frac{b_4}{2} + 10 \times \frac{b_3}{3} + 10 \times \frac{b_2}{4} + 5 \times \frac{b_1}{5} + \frac{b_0}{6}\right) = -\left(-\frac{1}{12} + 0 + \frac{5}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 0$.
- $b_6 = -\left(6 \times \frac{b_5}{2} + 15 \times \frac{b_4}{3} + 20 \times \frac{b_3}{4} + 15 \times \frac{b_2}{5} + 6 \times \frac{b_1}{6} + \frac{b_0}{7}\right) = -\left(0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{42}$.

$$b_5 = 0 \text{ et } b_6 = \frac{1}{42}.$$

II.2.e) $b_0 = 1$ est un rationnel et si pour $n \geq 1$, on a $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $b_k \in \mathbb{Q}$, alors $b_n = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1} \in \mathbb{Q}$. Ceci montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{Q}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les nombres $\binom{n}{k} b_{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, sont rationnels et donc le polynôme B_n est à coefficients rationnels.

II.2.f) • $C_0(X) = B_0(X) = 1$.

• Pour $n \geq 1$, $C'_n(X) = (-1)^n \times -B'_n(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = n C_{n-1}(X)$.

• Pour $n \geq 1$, $\int_0^1 C_n(x) dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t) dt = (-1)^n \int_1^0 B_n(u) \times -du = 0$.

Par unicité de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n(X) = B_n(X)$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X).$$

II.2.g) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $B_{2n+1}(1-X) = -B_{2n+1}(X)$ (*). En évaluant en $\frac{1}{2}$, on obtient $B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc $B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En évaluant en 0 les deux membres de l'égalité (*), on obtient aussi $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$. Mais d'après la question II.2.b), pour $p \geq 2$, on a $B_p(1) = B_p(0)$ et en particulier, puisque $2n+1 \geq 1$, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$. On en déduit que $B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$ et donc que $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n+1} = 0.$$

II.3. Etude des variations de B_n sur $[0, 1]$.

II.3.a) On sait que l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle est strictement positive. Donc si P est un polynôme non nul et positif sur $[0, 1]$, $\int_0^1 P(t) dt > 0$. De même si P est un polynôme non nul et négatif sur $[0, 1]$, $\int_0^1 P(t) dt < 0$. Dans tous les cas, $\int_0^1 P(t) dt \neq 0$.

II.3.b) Pour $n \geq 1$, on note \mathcal{P}_n la liste des six propriétés de l'énoncé.

• $(-1)^1 B_2(1) = (-1)^1 B_2(0) = -\frac{1}{6} < 0$ et $(-1)^1 B_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} > 0$.

Ensuite, pour $x \in [0, 1]$, $(-1)^1 B_2(x) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$ et donc la fonction $(-1)^1 B_2$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De plus, $(-1)^1 B_2$ est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, 1\right]$ et strictement positive sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right]$.

Puisque $((-1)^1 B_3)' = 3(-1)^1 B_2$, on en déduit que la fonction $(-1)^1 B_3$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, 1\right]$. Enfin, d'après la question II.2.g), $(-1)^1 B_3(0) = (-1)^1 B_3(1) = (-1)^1 B_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Donc, \mathcal{P}_1 est vraie.

• Soit $n \geq 1$. Supposons \mathcal{P}_n vraie.

$((-1)^{n+1} B_{2n+2})' = (2n+2)(-1)^{n+1} B_{2n+1} = -(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$. Par hypothèse de récurrence, la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$ et strictement croissante sur $\left[\alpha_{2n+1}, \frac{1}{2}\right]$ avec $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc la fonction $-(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. De même, la fonction $-(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement négative sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

On en déduit que la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ensuite, $\int_0^1 B_{2n}(x) dx = 0$ et d'après la question II.3.a), la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ ne peut être de signe constant sur $[0, 1]$. On ne peut avoir $(-1)^{n+1} B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ car alors la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ serait négative sur $[0, 1]$. De même, on ne peut avoir $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = 0$ car alors la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ serait positive sur $[0, 1]$.

Donc, $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) \times (-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et puisque la fonction est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et n'est pas de signe constant sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0$ et $(-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

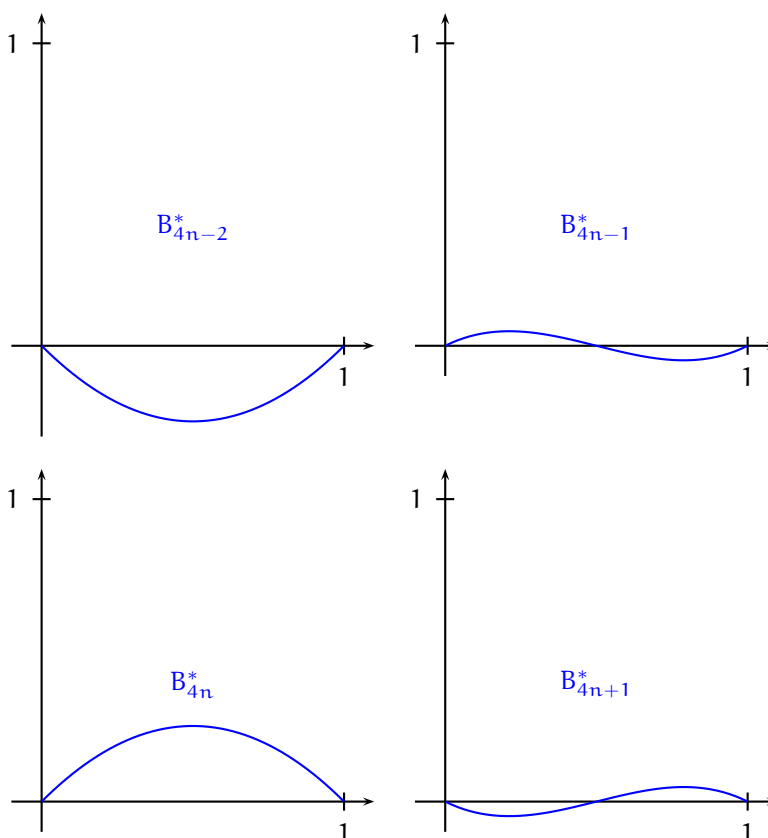
$((-1)^{n+1}B_{2n+3})' = (2n+3)(-1)^{n+1}B_{2n+2}$. Mais d'après ce qui précède, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et vérifie $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) \times (-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. On en déduit que la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ s'annule une et une seule fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en un certain réel α_{2n+3} et de plus, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est strictement négative sur $[0, \alpha_{2n+3}[$ et strictement positive sur $\left] \alpha_{2n+3}, \frac{1}{2} \right]$. Mais alors, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+3}[$ et strictement croissante sur $\left[\alpha_{2n+3}, \frac{1}{2} \right]$. De même, puisque $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $B_{2n+3}(x) = -B_{2n+3}(1-x)$, en posant $\beta_{2n+3} = 1 - \alpha_{2n+3}$, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, \beta_{2n+3}\right]$ et strictement décroissante sur $[\beta_{2n+3}, 1]$.

Finalement, il existe deux réels $\alpha_{2n+3} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\beta_{2n+3} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ tels que la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+3}]$, strictement croissante sur $[\alpha_{2n+3}, \beta_{2n+3}]$ et strictement décroissante sur $[\beta_{2n+3}, 1]$. Enfin, les égalités $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}(1) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ sont connues.

Le résultat est démontré par récurrence.

II.3.c) D'après la question précédente, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{p+1}b_{2p} > 0$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, le signe de b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

II.3.d) Graphes.



II.4. Une application arithmétique.

II.4.a) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, B_{n+1}(x) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

- Pour tout réel x , $B_1(x+1) - B_1(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 = 1 \times x^0$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, B_n(x) - B_n(x) = nx^{n-1}$. Alors, pour tout réel x ,

$$(B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x))' = (n+1)(B_n(x+1) - B_n(x)) = (n+1)nx^{n-1}.$$

Par suite, il existe un réel α tel que pour tout réel x , $B_{n+1}(x) - B_n(x) = (n+1)x^n + \alpha$. Maintenant, $n+1 \geq 2$, et donc $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ d'après la question II.2.b). En évaluant en 0, on obtient $0 = (n+1)0^n + \alpha = \alpha$ (car $n \geq 1$) et donc pour tout réel x , $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, B_n(x) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

II.4.b) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $k^p = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k))$ et donc

$$\begin{aligned} S_p(N) &= \sum_{k=0}^N k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^N (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) \\ &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0)) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}). \end{aligned}$$

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}.$$

II.4.c) • Pour $N \in \mathbb{N}$, $S_1(N) = \frac{B_2(N+1) - b_2}{2} = \frac{(N+1)^2 - (N+1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$.

• Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_2(N) = \frac{1}{3} \left((N+1)^3 - \frac{3}{2}(N+1)^2 + \frac{1}{2}(N+1) \right) = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

• Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_3(N) = \frac{1}{4} ((N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2) = \frac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4} = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, S_1(N) = \frac{N(N+1)}{2}, S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \text{ et } S_3(N) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

II.5. Une application analytique.

II.5.a) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{|b_{2p}|}{(2p)!} t^{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}}{\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{4\pi p}} t^{2p} = 2 \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2p}.$$

Par suite, si $|t| < 2\pi$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|b_{2p}|}{(2p)!} t^{2p} = 0$ et dans ce cas, la suite $\left(\frac{b_{2p}}{(2p)!} t^{2p}\right)$ est bornée (toute suite convergente est bornée) et si $|t| > 2\pi$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|b_{2p}|}{(2p)!} t^{2p} = +\infty$ et dans ce cas, la suite $\left(\frac{b_{2p}}{(2p)!} t^{2p}\right)$ n'est pas bornée. Comme d'autre part $\forall p \geq 1$, $\frac{b_{2p+1}}{(2p+1)!} t^{2p+1} = 0$, la suite $\left(\frac{b_n t^n}{n!}\right)$ est bornée si $|t| < 2\pi$ et non bornée si $|t| > 2\pi$. On sait alors que la série entière de terme général $\frac{b_n t^n}{n!}$ a pour rayon 2π .

II.5.b) Soit $t \in]-2\pi, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \times \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}\right) - b_n\right) t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (B_n(1) - b_n) t^n \text{ (d'après la question II.2.c))} \\ &= (B_1(1) - b_0) t \text{ (d'après la question II.2.b))} \\ &= t. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}, \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!}.$$

Remarque. On peut prolonger la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. L'égalité précédente reste alors valable pour $t = 0$.

II.5.c) Pour tout réel x et tout réel $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{te^{xt}}{e^t - 1} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k!(n-k)!} x^k \right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x) t^n}{n!} \quad (\text{d'après la question II.2.c}) \end{aligned}$$

$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x) t^n}{n!}.$$

II.5.d) Ceci montre déjà que $R \geq 2\pi$ où R est la rayon de convergence de la série entière précédente. De plus, les calculs précédents restent valables si on remplace le réel $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$ par un complexe z tel que $z \neq 0$ et $|z| < 2\pi$. En notant $D(0, 2\pi)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon 2π ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}, \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x) z^n}{n!}.$$

Maintenant, pour $x \in \mathbb{R}$ et $|z| < 2\pi$, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x) z^n}{n!} \right| = \left| \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \right|$. Or $\left| \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \right|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers $2i\pi$. Comme la somme d'une série entière doit être bornée sur tout disque fermé contenu dans son disque ouvert de convergence, on ne peut avoir $R > 2\pi$ et finalement $R = 2\pi$.

III - Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli.

III.1. Fonction ζ .

III.1.a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[k, k+1]$. Par suite,

$$\frac{1}{(k+1)^s} = (k+1 - k) \times \frac{1}{(k+1)^s} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^s} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s} dx = \frac{1}{k^s}.$$

$$\forall s > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \frac{1}{k^s}.$$

Il est alors connu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$ converge si et seulement si $s > 1$ et de même la série de terme général $\frac{1}{k^s}$, $k \geq 1$, converge si et seulement si $s > 1$.

III.1.b) La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Soient s et s' deux réels tels que $1 < s < s'$. Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^{s'}} < \frac{1}{n^s}$ (car la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}) et donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{s'}} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ puis $\zeta(s') < \zeta(s)$.

On a montré que

la fonction ζ est définie et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

III.1.c) Soit $s > 1$. D'après la question a),

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^s} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s).$$

Mais $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left[-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$ et donc

$$\forall s > 1, \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1.$$

Par suite, $\forall s > 1, 1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1)$ et le théorème des gendarmes montre que $\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$ ou encore que $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$. En particulier, $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

$$\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1} \text{ et } \lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty.$$

III.1.d) Soit $a > 1$. Pour tout $s \geq a$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup \left\{ \left| \frac{1}{n^s} \right|, s \geq a \right\} \leq \frac{1}{n^a}$.

Puisque $a > 1$, la série numérique de terme général $\frac{1}{n^a}$, $n \geq 1$, converge et donc la série de fonctions de terme général $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$.

- Soit $a > 1$. Chaque fonction f_n est continue sur $[a, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$. Donc la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

- La série de fonction de terme général f_n , $n \geq 1$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $[2, +\infty[$. De plus, chaque fonction f_n , $n \geq 1$, a une limite quand s tend vers $+\infty$ à savoir $\lim_{s \rightarrow +\infty} f_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction ζ a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

$$\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[\text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty.$$

III.1.e) Soit $s > 0$. La suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc, la série numérique de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $n \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Ensuite, pour $s > 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \theta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^s} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s} \\ &= \frac{1}{2^{s-1}} \zeta(s), \end{aligned}$$

et donc

$$\forall s > 1, \theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}} \right) \zeta(s).$$

III.2. Calcul de $\zeta(2p)$.

III.2.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $c_0(B_n) = \int_0^1 B_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. $c_k(B_0) = \int_0^1 e^{-2ik\pi x} dx = 0$. Ensuite, les deux fonctions B_1 et $x \mapsto e^{-2ik\pi x}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$c_k(B_1) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2ik\pi x} dx = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-2ik\pi x}}{-2ik\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi} \int_0^1 e^{-2ik\pi x} dx = \frac{1}{-2ik\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 0 = -\frac{1}{2ik\pi}.$$

Soit $n \geq 2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} c_k(B_n) &= \int_0^1 B_n(x) e^{-2ik\pi x} dx = \left[B_n(x) \frac{e^{-2ik\pi x}}{-2ik\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi} \int_0^1 B_n'(x) e^{-2ik\pi x} dx \\ &= 0 + \frac{n}{2ik\pi} \int_0^1 B_{n-1}(x) e^{-2ik\pi x} dx \quad (\text{pour } n \geq 2, B_n(1) = B_n(0)) \\ &= \frac{n}{2ik\pi} c_k(B_{n-1}). \end{aligned}$$

On en déduit que $c_k(B_n) = \frac{n}{2ik\pi} \times \frac{n-1}{2ik\pi} \times \frac{2}{2ik\pi} \times c_k(B_1) = -\frac{n!}{(2ik\pi)^n}$ ce qui reste vrai quand $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_0(B_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, c_k(B_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -\frac{n!}{(2ik\pi)^n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

III.2.b) Tout d'abord, si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, puisque B_n est à coefficients réels

$$\overline{c_k(B_n)} = \overline{\int_0^1 B_n(x) e^{-2ik\pi x} dx} = \int_0^1 B_n(x) e^{2ik\pi x} dx = c_{-k}(B_n).$$

Par suite, pour n et m entiers naturels non nuls

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k(B_n)} c_k(B_m) \\ &= \overline{c_0(B_n)} c_0(B_m) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\overline{c_k(B_n)} c_k(B_m) + \overline{c_{-k}(B_n)} c_{-k}(B_m) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (c_{-k}(B_n) c_k(B_m) + c_k(B_n) c_{-k}(B_m)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n!}{(-2ik\pi)^n} \frac{m!}{(2ik\pi)^m} + \frac{n!}{(2ik\pi)^n} \frac{m!}{(-2ik\pi)^m} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n! m! ((-1)^n + (-1)^m)}{(2ik\pi)^{n+m}} \\ &= \frac{n! m! ((-1)^n + (-1)^m)}{(2i\pi)^{n+m}} \zeta(n+m). \end{aligned}$$

III.2.c) En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 B_1(x) B_{2p-1}(x) dx = \frac{(2p-1)! ((-1) + (-1)^{2p-1})}{(2i\pi)^{2p}} \zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} (2p-1)!}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \zeta(2p)$.

D'autre part, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_1(x) B_{2p-1}(x) dx &= \left[B_1(x) \frac{B_{2p}(x)}{2p} \right]_0^1 - \frac{1}{2p} \int_0^1 B_{2p}(x) dx = \frac{1}{2p} (B_1(1) B_{2p}(1) - B_1(0) B_{2p}(0)) \\ &= \frac{b_{2p}}{2p}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{(-1)^{p+1} (2p-1)!}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \zeta(2p) = \frac{b_{2p}}{2p}$ et donc $\zeta(2p) = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1} \pi^{2p} b_{2p}}{(2p)!} = (-1)^{p+1} \frac{b_{2p}}{2} \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \zeta(2p) = (-1)^{p+1} \frac{b_{2p}}{2} \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}.$$

III.2.d) • $\zeta(2) = \frac{b_2}{2} \frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{4\pi^2}{6 \times 2 \times 2} = \frac{\pi^2}{6}$.

• $\zeta(4) = -\frac{b_4}{2} \frac{(2\pi)^4}{24} = \frac{16\pi^4}{30 \times 2 \times 24} = \frac{\pi^4}{90}$.

- $\zeta(6) = \frac{b_6 (2\pi)^6}{2 \cdot 720} = \frac{2^6 \pi^6}{42 \times 2 \times 2.3.4.5.6} = \frac{\pi^6}{945}$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2) = \left(1 - \frac{1}{2^1}\right) \zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \theta(4) = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \zeta(4) = \frac{7}{8} \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{720}$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \theta(6) = \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \zeta(6) = \frac{31}{32} \times \frac{\pi^6}{945} = \frac{31\pi^6}{30240}$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4}{90} + \frac{7}{8} \times \frac{\pi^4}{90} \right) = \frac{15}{16} \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^6}{945} + \frac{31}{32} \times \frac{\pi^6}{945} \right) = \frac{63}{64} \times \frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{960}$.

III.2.e) D'après la question III.1.c), $\lim_{p \rightarrow +\infty} \zeta(2p) = 1$. Par suite, d'après la formule de STIRLING,

$$b_{2p} = (-1)^{p+1} \frac{(2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \zeta(2p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{p+1} \frac{\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{4p\pi}}{2^{2p-1} \pi^{2p}} = (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}.$$

$$b_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}.$$

III.2. Application numérique.

III.3.a) Soient $s > 1$ et $N \geq 1$.

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} dx = \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left[-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}} \right]_N^{+\infty} = \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

III.3.b) Soient $\epsilon > 0$ et $s > 1$. Pour tout entier naturel non nul N ,

$$0 \leq \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \frac{N^{1-s}}{s-1},$$

puis

$$0 \leq \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{N^{1-s}}{s-1} < \epsilon \Rightarrow N^{s-1} > \frac{1}{\epsilon(s-1)} \Leftrightarrow N > \left(\frac{1}{\epsilon(s-1)}\right)^{1/(s-1)}.$$

On peut prendre $N_0 = \left\lceil \left(\frac{1}{\epsilon(s-1)}\right)^{1/(s-1)} \right\rceil + 1$.

III.3.c) Pour $s = 6$, on obtient en posant $N_0 = \left\lceil \sqrt[5]{\frac{1}{5\epsilon}} \right\rceil + 1$, $0 < \frac{\pi^6}{945} - \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^6} < \epsilon$ et donc

$$945 \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^6} < \pi^6 < 945 \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^6} + \epsilon \right).$$

On choisit ϵ de sorte que $945\epsilon \leq 10^{-2}$. Par exemple, on peut prendre $\epsilon = 10^{-4}$.

On obtient $N_0 = \left\lceil \sqrt[5]{\frac{1}{5 \times 10^{-4}}} \right\rceil + 1 = \left\lceil \sqrt[5]{2000} \right\rceil + 1 = 5$. Par suite, $A = 945 \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^6}$ est une approximation rationnelle de π^6 à 10^{-2} près par défaut.

III.3.d) Par suite, $\sqrt[6]{945 \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^6}} < \pi < \sqrt[6]{945 \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^6} + 10^{-2}}$ ou encore $3,141\dots < \pi < 3,146\dots$ et donc $3,14 < \pi < 3,15$. On a obtenu $\pi = 3,14\dots$

IV - Formule de Stirling généralisée.

IV.1.

IV.1.a) Soit $n \geq 1$. $\frac{\Omega_{n+1}}{\Omega_n} = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}} \times \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$. Soit alors $N \geq 2$.

$$\begin{aligned} \ln \Omega_N &= \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (\ln \Omega_{n+1} - \ln \Omega_n) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \ln \left(e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right) = \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) \right) \\ &= \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

IV.1.b) Soit $t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t) &= \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)} t^n. \end{aligned}$$

Ainsi, si pour $t \in]-1, +\infty[$, on pose $\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, alors $\forall t \in]-1, 1[$, $\varphi(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)} t^n$.

Puisque $\left|(-1)^n \frac{n-1}{2n(n+1)}\right|_{n \rightarrow +\infty} \sim \frac{1}{2n}$, le rayon de convergence de la série précédente est 1.

IV.1.c) Soient $N \geq 2$ puis $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

$$1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \varphi \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \frac{1}{n^k}$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln \Omega_N &= \ln \Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \frac{1}{n^k} \right) \text{ (somme de } N-1 \text{ séries convergentes)} \\ &= \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^k} \right) = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\zeta(k) - \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k} \right). \end{aligned}$$

IV.1.d) La fonction ζ est décroissante et positive sur $]1, +\infty[$. Donc, la suite $(\zeta(k))_{k \geq 2}$ est décroissante et positive.

D'autre part, pour $k \geq 2$, $\frac{k}{2(k+1)(k+2)} - \frac{k-1}{2k(k+1)} = \frac{k^2 - (k-1)(k+2)}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{-k+2}{2k(k+1)(k+2)} \leq 0$. Donc la suite $\left(\frac{k-1}{2k(k+1)}\right)_{k \geq 2}$ est décroissante et positive. On en déduit que la suite $\left(\frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)\right)_{k \geq 2}$ est décroissante et positive en tant que produit de deux suites décroissantes et positives.

Enfin, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \zeta(k) = 1$ d'après la question III.1.d) et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) = 0$.

En résumé, la suite $\left((-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)\right)_{k \geq 2}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant.

Donc la série de terme général $(-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k)$, $k \geq 2$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

IV.1.e) Pour $N \geq 2$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \ln \Omega_N &= \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k} \right) \\ &= \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N). \end{aligned}$$

IV.2.

IV.2.a) Soient $n \geq 2$ et $k \geq 2$.

$$\sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^k} dx \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k} = R_k(N) = \frac{1}{N^k} + \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n \geq N+1} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^k} dx + \frac{1}{N^k}$$

et donc $\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \leq R_k(N) \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx + \frac{1}{N^k}$ ou enfin

$$\frac{1}{(k-1)N^{k-1}} \leq R_k(N) \leq \frac{1}{(k-1)N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}.$$

IV.2.b) Soient $p \geq 3$ et $N \geq 2$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \right| &\leq \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k-1}{2k(k+1)} \left(\frac{1}{(k-1)N^{k-1}} + \frac{1}{N^k} \right) \\ &= \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2k(k+1)} \frac{1}{N^{k-1}} + \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k-1}{2k(k+1)} \frac{1}{N^k} \\ &\leq \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2k(k+1)} + \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{N^k} = \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2k(k+1)} + R_p(N) \\ &\leq \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{(p-1)N^{p-1}} + \frac{1}{N^p}, \end{aligned}$$

et donc $N^{p-2} \left| \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{(p-1)N} + \frac{1}{N^2}$.

Par suite, $\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{p-2} \left| \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \right| = 0$ et finalement

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right).$$

IV.3. D'après la formule de STIRLING, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Omega_N = 1$ et donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(\Omega_N) = 0$. Ensuite, d'après la question précédente

$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question IV.1.e), on en déduit que

$$0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) + 0,$$

et donc que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) = \ln(\Omega_1) = \ln\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right) = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

IV.3.a) On en déduit aussi que pour tout $N \geq 2$,

$$\ln(\Omega_n) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N).$$

IV.3.b) Soit $p \geq 1$. D'après la question IV.2.b)

$$\ln(\Omega_N) = \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + \sum_{k=p+2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + o\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

Par suite, si les suites $(R_2(N)), \dots, (R_{p+1}(N))$ admettent des développements limités en $\frac{1}{N}$ à l'ordre p , il en est de même de la suite $(\ln(\Omega_N))$.

IV.3.c) D'après ce qui précède, $\ln(\Omega_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} (-1)^2 \frac{2-1}{2 \times 2(2+1)} R_2(N) + o\left(\frac{1}{N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{R_2(N)}{12} + o\left(\frac{1}{N}\right)$.

Maintenant, d'après la question IV.2.a), pour tout $N \geq 2$, $\frac{1}{N} \leq R_2(N) \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}$. Par suite, $\lim_{N \rightarrow +\infty} N R_2(N) = 1$ et donc $R_2(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$. Par suite,

$$\ln(\Omega_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Mais alors

$$\Omega_N = e^{\ln \Omega_N} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

IV.4.

IV.4.a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{N} = \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ (série télescopique convergente). Par suite,

$$R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \geq N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n \geq N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

IV.4.b) Soit $N \geq 2$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2(x+1)}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \sum_{n \geq N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2(x+1)} dx \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2(n+1)} \leq \sum_{n \geq N} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

Maintenant,

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_N^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]_N^{+\infty} = \frac{1}{N} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

et donc aussi $\int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2(N-1)^2} + o\left(\frac{1}{(N-1)^2}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Par suite,

$$R_2(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Ensuite, d'après la question IV.2.a), $R_3(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Mais alors,

$$\ln(\Omega_N) = \frac{R_2(N)}{12} - \frac{R_3(N)}{12} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) - \frac{1}{24N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

puis

$$\Omega_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

IV.4.c) On veut effectuer un développement limité de Ω_N en $\frac{1}{N}$ à l'ordre $p \geq 1$.

On écrit déjà $\Omega_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)\right) + o\left(\frac{1}{N^p}\right)$. Il s'agit alors d'obtenir un développement limité de Ω_N en $\frac{1}{N}$ à l'ordre p de chaque $R_k(N)$, $1 \leq k \leq p+1$.

On démarre avec la question IV.2.a qui fournit $R_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{(k-1)N^{k-1}} + o\left(\frac{1}{N^{k-1}}\right)$ puis on obtient la différence $R_k(N) - \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$ comme somme d'une série que l'on compare à une intégrale généralisée pour obtenir un équivalent de $R_k(N) - \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$. Puis on réitère pour obtenir le terme en $\frac{1}{N^k}$...