SESSION 2010

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Partie I : Série génératrice d'une suite (a_n)

1) Propriétés algébriques

1.a) • $\times$ est une loi interne dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l\right)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Donc $\times$ est commutative.

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} a_p b_q\right) c_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k} a_p b_q c_{n-k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{p+q+r=n} a_p b_q c_r\right)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Ensuite, en échangeant les rôles des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et puisque $\times$ est commutative,

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}}) \times (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\sum_{p+q+r=n} b_p c_q a_r\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\sum_{p+q+r=n} a_p b_q c_r\right)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Donc $\times$ est associative.

• La suite $X^0 = 1$ est la suite de terme général $\delta_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}$, où $/\mathrm{delta}a_{i,j}$ est le symbôle de KRONECKER. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme de rang n de la suite $a \times 1$ est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{n-k,0} = a_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a \times 1)_n = a_n$ puis $a \times 1 = a$. Puisque $\times$ est commutative, on a aussi $1 \times a = a$. Ainsi, $\forall a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$ et donc 1 est élément neutre pour $\times$.

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k\right) c_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (c_n)_{n\in\mathbb{N}},\end{aligned}$$

et de même, puisque $\times$ est commutative, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \times ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $\times$ est distributive sur $+$.

$\boxed{(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times) \text{ est un anneau commutatif d'élément unité } X^0 = 1.}$

Remarque. La notation X^p est cohérente. En effet, on vérifie que

- pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} \times (\delta_{n,q})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \delta_{k,p}\delta_{n-k,q}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{p+q,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- en particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}^p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que si on pose $X = (\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} = X^p$.
- pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a alors $X^p \times X^q = X^{p+q}$.

1.b) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments non nuls de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soient $p = \text{Min}\{k \in \mathbb{N}/\ a_k \neq 0\}$ et $q = \text{Min}\{k \in \mathbb{N}/\ b_k \neq 0\}$ (p et q existent dans $\mathbb{N}$ car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément).

Le terme de rang $p+q$ de la suite $a \times b$ est $\sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k}$. Dans cette somme, si $k < p$ alors $a_k = 0$ puis $a_k b_{p+q-k} = 0$, et si $k > p$, alors $p+q-k < p+q-p = q$ et donc $b_{p+q-k} = 0$ puis $a_k b_{p+q-k} = 0$. Il reste $\sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = a_p b_q \neq 0$.

Donc au moins un des termes de la suite $a \times b$ est non nul et finalement $a \times b \neq (0)$.

En résumé, un produit d'éléments non nuls de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est non nul et donc

$\boxed{(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\times) \text{ est intègre.}}$

1.c) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

• Supposons $a_0 = 0$. Alors, pour tout élément $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(a \times b)_0 = a_0 \times b_0 = 0$ et en particulier, pour tout élément $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $a \times b \neq 1$. Dans ce cas, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément non inversible de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

• Supposons $a_0 \neq 0$. Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$a \times b = 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{n,0} \Leftrightarrow a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Montrons par récurrence l'existence (et l'unicité) de chaque b_n, $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, l'équation $a_0 b_0 = 1$ équivaut à $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Donc b_0 existe (et est uniquement défini).
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons acquises l'existence (et l'unicité) de $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Alors $b_{n+1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k}$ existe (et est uniquement défini).

En résumé, il existe une (unique) suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a \times b = 1$ et donc a est inversible.

$\boxed{\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est inversible pour } \times \text{ si et seulement si } a_0 \neq 0.}$

1.d) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.)$ est l'espace des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles. Donc

$\boxed{(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.) \text{ est un espace vectoriel.}}$

Remarque. La famille $(X^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est libre mais cette famille n'est pas une base de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ car n'est pas génératrice de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La famille $(X^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X],+,.)$ le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Eléments inversibles

2.a) Il s'agit de vérifier que $(1-X) \times \sum_{n\geqslant 0} X^n = 1$. $1-X$ est la suite $a = (1,-1,0,0\ldots)$ et $\sum_{n\geqslant 0} X^n$ est la suite $b = (1,1,1,\ldots)$.

Or, $(a \times b)_0 = a_0 b_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a \times b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 \times +(-1) \times 1 = 0.$$

Donc $a \times b = 1$ ou encore

$$\boxed{\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geqslant 0} X^n.}$$

2.b) Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Il s'agit de vérifier que $(1 - aX) \times \sum_{n \geqslant 0} a^n X^n = 1$. $1 - aX$ est la suite $A = (1, -a, 0, 0 \ldots)$ et $\sum_{n \geqslant 0} a^n X^n$ est la suite $B = (1, a, a^2, \ldots)$.

Or, $(A \times B)_0 = A_0 B_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(A \times B)_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} = 1 \times a^n - a \times a^{n-1} = 0.$$

Donc $A \times B = 1$ ou encore

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\ \frac{1}{1 - aX} = \sum_{n \geqslant 0} a^n X^n.}$$

2.c) Soient a et b deux éléments non nuls de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-ax} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX} &= \frac{1}{b-a}\frac{-a(1-bX)+b(1-aX)}{(1-aX)(1-bX)} = \frac{1}{b-a}\frac{b-a}{(1-aX)(1-bX)} \\ &= \frac{1}{(1-aX)(1-bX)}.\end{aligned}$$

3) L'opérateur de dérivation

3.a) D est bien une application de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. De plus, si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et λ et μ sont deux éléments de $\mathbb{K}$,

$$D(\lambda a + \mu b) = \sum_{n \geqslant 0} (n+1)(\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) X^n = \lambda \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} X^n + \mu \sum_{n \geqslant 0} (n+1) b_{n+1} X^n = \lambda D(a) + \mu D(b).$$

Donc

$$\boxed{D \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}).}$$

3.b) (Attention, il ne suffit pas de vérifier que la formule proposée est vraie pour les éléments de la famille $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ car cette famille n'est pas génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .)$).

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}D(A) \times B + A \times D(B) &= \left(\sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} X^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\right) + \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} X^n\right) \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k}\right) X^n + \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1}\right) X^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-(k-1)}\right) X^n + \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1}\right) X^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n+1} k a_k b_{n-(k-1)}\right) X^n + \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k (n-k+1) b_{n-k+1}\right) X^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} (n+1) \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}\right) X^n \\ &= D(A \times B)\end{aligned}$$

3.c) Soient A un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et B un élément inversible de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$D(A) = D\left(B \times \frac{A}{B}\right) = D(B) \times \frac{A}{B} + B \times D\left(\frac{A}{B}\right),$$

et donc

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B} \times \left(D(A) - \frac{A}{B} \times D(B)\right) = \frac{D(A) \times B - A \times D(B)}{B^2}.$$

Remarque. En particulier, $D\left(\frac{1}{B}\right) = -\frac{D(B)}{B^2}$. Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $D\left(\frac{1}{B^p}\right) = \frac{-pD(B)}{B^{p+1}}$.

4) Quelques exemples

4.a) $\frac{1}{(1-X)^2} = D\left(\frac{1}{1-X}\right) = D\left(\sum_{n\geqslant 0} X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)X^n$.

4.b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $D^{p-1}\left(\frac{1}{1-X}\right) = 1\times 2\times\ldots\times(p-1)\frac{1}{(1-X)^p} = \frac{(p-1)!}{(1-X)^p}$ et donc

$$\frac{1}{(1-X)^p} = \frac{1}{(p-1)!}D^{p-1}\left(\frac{1}{1-X}\right) = \frac{1}{(p-1)!}\left((p-1)! + \sum_{n\geqslant p} n(n-1)\ldots(n-(p-1)+1)X^{n-(p-1)}\right)$$
$$= \sum_{n\geqslant p-1}\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}X^{n-(p-1)} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!n!}X^n = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+p-1}{n}X^n.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+p-1}{n}X^n.}$$

4.c) Soit A un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\frac{A(X)}{1-X} = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n\right)\times\left(\sum_{n\geqslant 0} X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)X^n.$$

4.d) En particulier, si $A(X) = \frac{1}{(1-X)^p}$, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+p}{n}X^n = \frac{1}{(1-X)^{p+1}} = \frac{1/(1-X)^p}{1-X} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{p,k}\right)X^n = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p-1}{k}\right)X^n.$$

Ainsi, les suites $\left(\binom{n+p}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p-1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}.}$$

Partie II : Séries génératrices et suites récurrentes

1)

1.a)

$$A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_nX^n = \sum_{n\geqslant 1} a_nX^n = \sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}X^{n+1} = \sum_{n\geqslant 0}(2a_n+n)X^{n+1}$$
$$= 2X\sum_{n\geqslant 0} a_nX^n + \sum_{n\geqslant 0} nX^{n+1} = 2XA(X) + \sum_{n\geqslant 1} nX^{n+1} = 2XA(X) + \sum_{n\geqslant 0}(n+1)X^{n+2}$$
$$= 2XA(X) + X^2\sum_{n\geqslant 0}(n+1)X^n$$

1.b) Il existe trois réels a, b et c tels que $A(X) = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1-2X}$.

- $c = \lim_{x\to 1/2}(1-2x)A(x) = \frac{(1/2)^2}{(1-(1/2))^2} = 1$.
- $b = \lim_{x\to 1}(1-x)^2A(x) = \frac{1^2}{1-2} = -1$.
- $-\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} xF(x) = a - \frac{c}{2}$ et donc $a = 0$. Finalement,

$$\boxed{\frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{1}{1-2X} - \frac{1}{(1-X)^2}.}$$

1.c) D'après les questions II.1.a), I.4.a) et I.2.b), $A(X) = 2XA(X) + X^2 \sum_{n \geqslant 0} (n+1)X^n = 2XA(X) + \frac{X^2}{(1-X)^2}$ et donc

$$A(X) = \frac{X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{1}{1-2X} - \frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{n \geqslant 0} (2^n - (n+1))X^n,$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - n - 1.}$$

2)

2.a)

$$\begin{aligned}
F(X) &= \sum_{n \geqslant 0} F_n X^n = X + \sum_{n \geqslant 2} F_n X^n = X + \sum_{n \geqslant 0} F_{n+2} X^{n+2} = X + \sum_{n \geqslant 0} (F_{n+1} + F_n) X^{n+2} \\
&= X + X \sum_{n \geqslant 0} F_{n+1} X^{n+1} + X^2 \sum_{n \geqslant 0} F_n X_n = X + \sum_{n \geqslant 1} F_n X^n + X^2 \sum_{n \geqslant 0} F_n X_n \\
&= X + (X + X^2) F(X),
\end{aligned}$$

et donc $F(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$. Les racines du trinôme $x^2 - x - 1$ sont $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (on note que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et $\alpha_1\alpha_2 = -1$). Maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right) = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{5}}{1-(\alpha_1+\alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2 X^2} = \frac{X}{1-X-X^2} = F(X).$$

Donc

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right) \text{ où } \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

2.b) On en déduit que $F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geqslant 0} (\alpha_1^n + \alpha_2^n) X^n$ puis que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).}$$

3)

3.a) $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. De plus

• ϕ est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}^k$.

• Soient $(u, v) \in \mathcal{U}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\phi(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \ldots, \lambda u_{k-1} + \mu v_{k-1}) = \lambda(u_0, \ldots, u_{k-1}) + \mu(v_0, \ldots, v_{k-1}) = \lambda\phi(u) + \mu\phi(v).$$

• Soit $u \in \mathrm{Ker}\phi$. Alors, $u_0 = \ldots = u_{k-1} = 0$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

- C'est vrai pour $n \in [\![0, k-1]\!]$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall p \in [\![0, k-1]\!]$, $u_{n+p} = 0$. Alors $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n = 0$.

On a montré par récurrence que si $u \in \mathrm{Ker}\phi$, alors $u = (0)$. Donc ϕ est injective.

• Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Soit u l'élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $u_0 = \alpha_0$, ..., $u_{k-1} = \alpha_{k-1}$ et $\forall n \geqslant k$, $u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k}$. Alors u est un élément de $\mathcal{U}$ tel que $\phi(u) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$.
Ceci montre que ϕ est surjective.

Finalement,

$$\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{U} \text{ sur } \mathbb{C}^k.}$$

En particulier, $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathbb{C}^k) = k$.

3.b) Posons $b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ -a_n \text{ si } 1 \leqslant n \leqslant k \\ 0 \text{ si } n \geqslant k+1 \end{cases}$ de sorte que $P = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$.

Soit alors $n \geqslant k$. Le coefficient de X^n dans l'écriture développée de $Q(X) \times S(X)$ est

$$\sum_{p=0}^{n} b_p u_{n-p} = \sum_{p=0}^{k} b_p u_{n-p} = u_n - \sum_{p=1}^{k} a_p u_{n-p} = 0.$$

Donc, P est un polynôme de degré au plus $k-1$.

3.c) Puisque $a_k \neq 0$, les racines de (E) sont non nulles. Soit alors $z \in \mathbb{C}^*$.

$$(z-z_1)^{\alpha_1}\dots(z-z_p)^{\alpha_p} = z^k - (a_1 z^{k-1} + \dots + a_k) = z^k\left(1 - \frac{a_1}{z} - \dots - \frac{a_k}{z^k}\right) = z^k Q\left(\frac{1}{z}\right),$$

et donc, puisque $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$,

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^k\left(\frac{1}{X} - z_1\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{1}{X} - z_p\right)^{\alpha_p} = (1 - z_1 X)^{\alpha_1}\dots(1 - z_p X)^{\alpha_p} \\ &= (-z_1)^{\alpha_1}\dots(-z_p)^{\alpha_p}\left(X - \frac{1}{z_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(X - \frac{1}{z_p}\right)^{\alpha_p} = -a_k\left(X - \frac{1}{z_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(X - \frac{1}{z_p}\right)^{\alpha_p} \text{ (car dom}(Q) = -a_k). \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ est une fraction rationnelle. Puisque $\deg(P) < \deg(Q)$, la partie entière de $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ est nulle et puisque les racines de Q sont $\dfrac{1}{z_1}$ d'ordre α_1, ..., $\dfrac{1}{z_p}$ d'ordre α_p, $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{b_{i,j}}{\left(X - \frac{1}{z_i}\right)^j}\right).$$

3.d) On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} u_n X^n = S(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{b_{i,j}}{\left(X - \frac{1}{z_i}\right)^j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(1 - z_i X))^j}\right) \text{ (en posant } A_{i,j} = (-z_i)^j b_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j}\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+j-1}{n} z_i^n X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\right) z_i^n\right) X^n \end{aligned}$$

Maintenant, pour $i \in [\![1, p]\!]$ puis $j \in [\![1, \alpha_i]\!]$, $\dbinom{n+j-1}{n} = \dbinom{n+j-1}{j-1} = (n+j-1)(n+j-2)\dots(n+1)$ est un polynôme en n de degré $j-1$. Donc, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $R_i(n) = (\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j}\dbinom{n+j-1}{n}$ est un polynôme en n de degré au plus $\alpha_i - 1$ ou encore tel que $\deg(R_i) < \alpha_i$. Ainsi, il existe des polynômes R_1, ..., R_p tels que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\deg(R_i) < \alpha_i$ et

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n X^n = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n\right) X^n,$$

Par identification des coefficients, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n$ où R_1, ..., R_p sont des polynômes tels que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\deg(R_i) < \alpha_i$.

3.e) $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}\left((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (n^{\alpha_i - 1} z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (z_p^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (n^{\alpha_p - 1} z_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Donc $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension au plus $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$.

D'après la question précédente, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ et d'après la question 3.a), $\dim(\mathcal{U}) = k$. Donc $k \leqslant \dim(\mathcal{V}) \leqslant k$ et finalement $\dim(\mathcal{V} = k$.

En résumé, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ et $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{V}) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{V}.}$$

Partie III : Nombre de partitions d'un ensemble

1) Les différentes partitions de S en deux classes sont $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$. Donc

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}.}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

• Si $k = 1$, $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1+0 \text{ si } n=1 \\ 0+1 \text{ si } n \geqslant 2 \end{matrix}\right. = 1 = \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$ (il y a une seule partition de S en une classe à savoir $\{S\}$).

• Supposons maintenant $k \geqslant 2$.

- Si $n = 1$, $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\} = 0 = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.
- Si $n = 2$, $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1+0 \text{ si } k=2 \\ 0+0 \text{ si } k \geqslant 3 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.
- Supposons $n \geqslant 3$. Soit s un élément donné de S. Il y a deux types de partitions de S : les partitions qui contiennent le singleton $\{s\}$ (type I) et les partitions qui ne contiennent pas le singleton S (type II). De plus toute partition de S appartient à un et un seul des deux types ci-dessus.

  Une partition du type (I) s'écrit $\{s, P\}$ où P une partition de $S \setminus \{s\}$. Il y en a autant que de parttitions de $S \setminus \{s\}$, c'est-à-dire $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\}$.

  Dans une partition du type (II), s « n'est plus seul ». Une telle partition est obtenue en partitionnant l'ensemble $S \setminus \{s\}$ en k parties puis en incorporant l'élément s à l'une de ces k parties. Il y a $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$ partitions de $S \setminus \{s\}$ en k parties puis pour chacune de ces partitions il y a s choix possibles de la partie à laquelle appartient s, soit au total $k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\}$ partitions du type (II).

  Donc dans ce cas aussi, on a $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$.

On a montré que

$$\boxed{\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}.}$$

3)

3.a) Soit $k \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} A_k(X) &= \sum_{n \geqslant 0} \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} X^n = \sum_{n \geqslant 1} \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} X^n = \sum_{n \geqslant 1} \left(\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + k\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}\right) X^n \\ &= X \sum_{n \geqslant 1} \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right\} X^{n-1} + kX \sum_{n \geqslant 1} \left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\} X^{n-1} \\ &= X \sum_{n \geqslant 0} \left\{\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix}\right\} X^n + kX \sum_{n \geqslant 0} \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} X^n = XA_{k-1}(X) + kXA_k(X). \end{aligned}$$

3.b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $A_k(X) = \dfrac{X}{1-kX} A_{k-1}(X)$.

Maintenant, $A_0(X) = \sum_{n \geqslant 0} \left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\} X^n = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$. On en déduit que

$$A_k(X) = \frac{X}{1-kX} \times \frac{X}{1-(k-1)X} \times \frac{X}{1-X} \times A_0(X) = \frac{X^k}{\prod_{m=1}^{k}(1-mX)}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_k(X) = \frac{X^k}{\displaystyle\prod_{m=1}^{k}(1-mX)}.}$$

3.c) Posons $P(X) = \displaystyle\prod_{m=1}^{k}(1-mX)$ puis $F(X) = \dfrac{1}{P(X)}$. P est à racines simples. Donc la décomposition en éléments simples de $F(X)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r}{1-rX}$ avec, pour $1 \leqslant r \leqslant k$,

$$\alpha_r = \lim_{x\to 1/r}(1-rx)F(x) = \frac{1}{\displaystyle\prod_{m\neq r}\left(1-\frac{m}{r}\right)} = \frac{r^{k-1}}{(r-1)(r-2)\ldots(r-(r-1))(r-(r+1))\ldots(r-k)}$$

$$= \frac{(-1)^{k-r}r^{k-1}}{(r-1)(r-2)\ldots(r-(r-1))((r+1)-r)\ldots(k-r)} = \frac{(-1)^{k-r}r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$$

3.d) Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n\geqslant 0}\left\{\begin{matrix} n \\ k\end{matrix}\right\}X^n = A_k(X) = X^k \times \frac{1}{\displaystyle\prod_{m=1}^{k}(1-mX)} = X^k\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{k-r}r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}\times\frac{1}{1-rX}\right)$$

$$= X^k\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{k-r}r^{k}}{r!(k-r)!}\left(\sum_{n\geqslant 0}r^nX^n\right)\right)$$

$$= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{k-r}r^{n+k}}{r!(k-r)!}\right)X^{n+k} = \sum_{n\geqslant k}\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{k-r}r^{n}}{r!(k-r)!}\right)X^{n}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant k,\ \left\{\begin{matrix} n \\ k\end{matrix}\right\} = \sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{k-r}r^{n}}{r!(k-r)!}.}$$

4)

4.a) Supposons $n < p$. Si f est une application de E vers F, $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(E) < \text{card}(F)$ et en particulier, $f(E) \neq F$. Donc f ne peut être surjective.

$$\boxed{\text{si } p > n,\ S(n,p) = 0.}$$

4.b) Supposons $p = n$ ou encore $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Si f est une application de E vers F, on sait que f est surjective si et seulement si f est bijective. $S(n,n)$ est le nombre de bijections de E sur F à savoir $n!$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n,n) = n!.}$$

4.c) Soient $n \geqslant 1$ puis $p \in [\![1,n]\!]$. Une surjection f de E sur F définit de manière unique une partition de E en p parties : si pour $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $S_k = f^{-1}(\{k\})$, alors $(S_1,\ldots,S_p)$ est une partition de E en p parties. Inversement, une partition de E en p parties définit $p!$ surjections deux à deux distinctes car il y a $p!$ possibilités d'associer à chacun des éléments S_1, ..., S_p d'une partition de E en p parties chacun des éléments de F. Donc, $S(n,p) = p!\left\{\begin{matrix} n \\ p\end{matrix}\right\}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [\![1,n]\!],\ S(n,p) = p!\left\{\begin{matrix} n \\ p\end{matrix}\right\}.}$$

Partie IV : Nombre de dérangements

1) $\mathfrak{S}_1 = \{\text{Id}\}$. Mais Id a un point fixe et donc $d_1 = 0$.
$\mathfrak{S}_2 = \{\text{Id}, \tau_{1,2}\}$ où $\tau_{1,2}$ est la transposition qui échange 1 et 2. Seule $\tau_{1,2}$ est sans point fixe et donc $d_2 = 1$.
$\mathfrak{S}_3 = \{\text{Id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, , \tau_{2,3}, c_1, c_2\}$ où c_1 est le cycle $(2\ 3\ 1)$ et c_2 est le cycle $(3\ 1\ 2)$. Seuls c_1 et c_2 sont sans point fixe et donc $d_3 = 2$.

$$\boxed{d_1 = 0,\ d_2 = 1 \text{ et } d_3 = 2.}$$

2)

2.a) Soient $n \in \mathbb{N}$ puis $k \in [\![0, n]\!]$.

• B_0 est l'ensemble des permutations sans points fixes de $\{1, \ldots, n\}$ et donc $\text{card}(B_0) = d_n = \binom{n}{0} d_{n-0}$.

• Si $n = 0$, $B_n = B_0$ et donc $\text{card}(B_n) = \text{card}(B_0) = 1 = \binom{n}{n} d_{n-n}$. Si $n \geqslant 1$, B_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui admettent n points fixes et donc $B_n = \{Id\}$ puis $\text{card}(B_n) = 1 = \binom{n}{n} d_{n-n}$.

• Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![2, n-1]\!]$ (si $n \in \{0, 1\}$, il n'y a plus rien à dire). Soit σ un élément de B_k. Si P est l'ensemble des k points fixes de σ, la restriction σ' de σ à $\{1, \ldots, n\} \setminus P$, est une permutation de $\{1, \ldots, n\} \setminus P$ car est une application injective de l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\} \setminus P$ dans lui-même. De plus, σ' ne peut avoir de point fixe.
Ainsi, la donnée d'un élément de B_k définit de manière unique un couple (P, σ') où P est une partie de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments et σ' est une permutation sans point fixe de l'ensemble $\{1, \ldots, n\} \setminus P$ à $n-k$ éléments.
Inversement, un couple (P, σ') où P est une partie de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments et σ' est une permutation sans point fixe de l'ensemble $\{1, \ldots, n\} \setminus P$ à $n-k$ éléments définit un unique élément de B_k. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour P et pour chaque choix de P, il y a d_{n-k} permutations sans point fixe de $\{1, \ldots, n\} \setminus P$. Donc $\text{card}(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

Maintenant, $(B_0, \ldots, B_n)$ est une partition de $\mathfrak{S}_n$ et donc

$$n! = \text{card}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!.}$$

2.b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times k! p_k$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = 1$. Par suite,

$$E(X) \times P(X) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} \right) X^n = \sum_{n \geqslant 0} X^n = \frac{1}{1-X}.$$

2.c)

$$E(X) \times E(-X) = \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} X^n \right) \times \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} X^n \right) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \right) X^n$$
$$= 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \right) X^n = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} (1-1)^n X^n = 1,$$

et donc $\displaystyle\frac{1}{E(X)} = E(-X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} X^n$.

2.d)

$$\sum_{n \geqslant 0} p_n X^n = P(X) = E(-X) \times \frac{1}{1-X} = \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1) n}{n!} X^n \right) \left(\sum_{n \geqslant 0} X^n \right)$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) X^n,$$

et donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ puis $d_n = n! p_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$$

Partie V : Nombre de Catalan

1) Chemins de Dyck

1.a) Pour $p \in [\![0, 2n[\![$, notons (p, y_p) les coordonnées du point s_p. Pour chaque $p \in [\![0, 2n-1]\!]$, on a $y_{p+1} = y_p \pm 1$. Donc y_p et y_{p+1} sont des entiers de parités contraires. Puisque y_0 est un nombre pair, on en déduit que les y_{2p}, $p \in [\![0, n]\!]$, sont des nombres pairs et les y_{2p+1}, $p \in [\![0, n-1]\!]$, sont des nombres impairs. En particulier, puisque 0 est pair, $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $y_{2p+1} \neq 0$. Mais alors, $k(\mathcal{C})$ ne peut être impair et donc $k(\mathcal{C})$ est pair.

1.b) En remontant l'axe des abscisses d'une unité vers le haut, on voit que tout chemin de Dick $(s_0, \dots, s_{2n})$ un chemin de Dick tel que $k(\mathcal{C}) = 2n$ définit un unique chemin de Dick $(s'_1, \dots, s'_{2n-1})$ quelconque joignant les points $s'_1 = (1, 0)$ et $s'_{2n-1} = (2n-1, 0)$ et réciproquement. Il y a c_{n-1} chemins de Dick quelconques $(s'_1, \dots, s'_{2n-1})$ et donc il y a c_{n-1} chemin de Dick $(s_0, \dots, s_{2n})$ tels que $k(\mathcal{C}) = 2n$.

1.c) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Un chemin de Dick $(s_0, \dots, s_{2n})$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ « est la réunion » d'un chemin de Dick $(s_0, \dots, s_{2p})$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ et d'un chemin de Dick $(s_{2p}, \dots, s_{2n})$ quelconque joignant les points $s_{2p} = (2p, 0)$ et $s_{2n} = (2n, 0)$.
D'après la question précédente, il y a c_{p-1} chemins de Dick $(s_0, \dots, s_{2p})$ tel que $k(\mathcal{C}) = 2p$ et pour chacun de ces chemins, il y a c_{n-p} chemins de Dick $(s_{2p}, \dots, s_{2n})$ quelconques joignant les points $s_{2p} = (2p, 0)$ et $s_{2n} = (2n, 0)$. Il y a donc $c_{p-1} \times c_{n-p}$ chemins de Dick $(s_0, \dots, s_{2n})$ tels que $k(\mathcal{C}) = 2p$.

1.d) Soit $n \geqslant 1$. Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on note C_p l'ensemble des chemins de Dick $\mathcal{C}$ tels que $k(\mathcal{C}) = 2p$. $\{C_1, \dots, C_n\}$ est une partition de l'ensemble des chemins de Dick de longueur $2n$ et donc

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} \text{card}(c_j) = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1}c_{n-j} \text{ (avec la convention } c_0 = 1).$$

2) Expression des nombres de Catalan

2.a) Tout d'abord, $\binom{\frac{1}{2}}{0}(-4)^0 = 1$, $\binom{\frac{1}{2}}{1}(-4)^1 = -2$ puis pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n &= (-1)^n 2^{2n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = (-1)^n 2^{2n} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{(2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{n!} \\
&= -2^n \frac{(2n-2) \times (2n-3) \times (2n-4) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{n!(2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 2} = -2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \\
&= -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$, et donc

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n X^n = 1 - \sum_{n \geqslant 1} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} X^n = 1 - \sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} X^{n+1}.$$

2.b)

$$(H(X))^2 + X = \frac{1}{4}(1 - 2S(X) + (S(X))^2) + X = \frac{1}{4}(1 - 2(1 - 2H(X)) + (1 - 4X)) + X = H(X),$$

3)

3.a) D'après la question 1.d)

$$\begin{aligned}
X \times C(X) &= \sum_{n \geqslant 0} c_n X^{n+1} = X + \sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-k}\right) X^{n+1} = X + X^2 \sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-1-(k-1)}\right) X^{n-1} \\
&= X + X^2 \sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}\right) X^{n-1} = X + X^2 \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) X^n = X + (X \times C(X))^2.
\end{aligned}$$

3.b) Posons alors $S_1(X) = 1 - 2XC(X) = \sum_{n \geqslant 0} s'_n X^n$. Alors

$$(S_1(X))^2 = 1 - 4XC(X) + 4(XC(X))^2 = 1 - 4(XC(X) - (XC(X))^2) = 1 - 4X.$$

Comme d'autre part, $s'_0 = 1 - 0 = 1$, on en déduit par unicité de S que $S_1(X) = S(X)$ et donc que

$$C(X) = \frac{1}{2X}(1 - S(X)) = \frac{1}{2X}\left(1 - 1 + \sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} X^{n+1}\right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} X^n.$$

Par identification des coefficients, on en déduit que pour tout entier naturel n, $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Maintenant, pour $n \geqslant 1$,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!((n+1)-n)}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_n,$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.}$$

