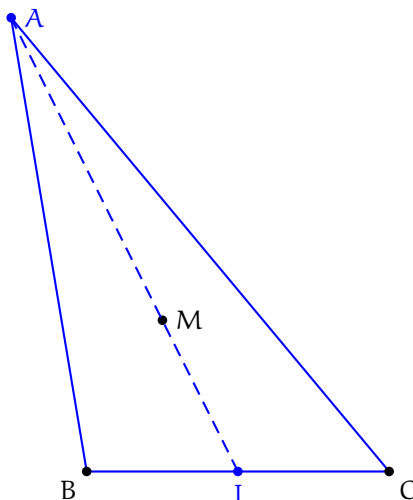


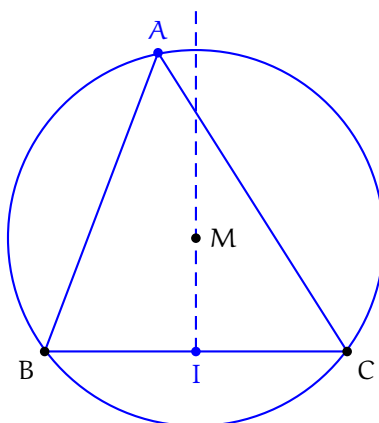
## Problème 1 : construction de triangles

1. On note  $I$  le milieu de  $[BC]$ . On sait que  $A$  est nécessairement l'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $I$  et de rapport 3 ou encore  $A$  est nécessairement le point tel que  $\vec{IA} = 3\vec{IM}$ . Réciproquement, soit  $A$  ainsi défini.  $A$  n'est pas sur la droite  $(BC)$  car sinon  $M = I + \frac{1}{3}\vec{IA}$  est sur  $(BC)$  ce qui n'est pas.

Ensuite, d'après le théorème du barycentre partiel,  $M = \text{bar}(A(1), I(2)) = \text{bar}(A(1), B(1), C(1))$  et donc le point  $A$  convient. Il existe donc un point  $A$  et un seul tel que  $M$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .



2. Si  $M$  n'est pas sur la médiatrice de  $[BC]$ , le problème n'a pas de solution. Supposons dorénavant que le point  $M$  soit un point de la médiatrice de  $[BC]$  et distinct de  $I$ . Le cercle de centre  $M$  et de rayon  $MB$  passe par  $C$ . Le point  $A$  est nécessairement sur ce cercle et réciproquement tout point  $A$  de ce cercle, distinct de  $B$  et  $C$  convient. Ainsi, si  $M$  est sur la médiatrice de  $[BC]$ , le problème a une infinité de solutions.



3. **1er cas.** Si le triangle  $MBC$  est rectangle en  $M$ , le point  $M$  est l'orthocentre du triangle  $MBC$  ce qui assure l'existence d'un point  $A$  à savoir  $A = M$ . Réciproquement, si le point  $M$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , on a nécessairement  $(MC) \perp (AB)$  et donc  $(AC) \parallel (MC)$ . Le point  $A$  est donc nécessairement sur la droite  $(MC)$ . De même, le point  $A$  est nécessairement sur la droite  $(MB)$  et finalement  $A = M$  puisque les droites  $(MB)$  et  $(MC)$  sont sécantes en  $M$ . Ceci assure l'unicité du point  $A$ .

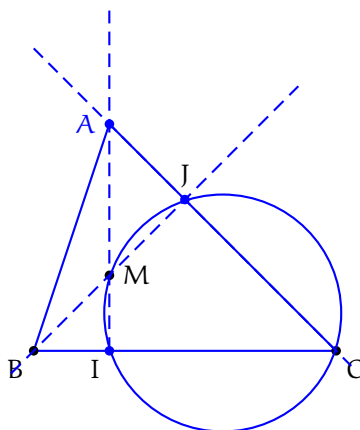
**2ème cas.** On suppose dorénavant que le triangle  $MBC$  n'est pas rectangle en  $M$ . Notons  $I$ ,  $J$  et  $K$  les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$  issues respectivement de  $A$ ,  $B$  et  $C$  si un triangle  $ABC$  solution existe. Le point  $I$  est donc nécessairement le projeté orthogonal du point  $M$  sur la droite  $(BC)$ .

Si  $M$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , puisque le triangle  $MBC$  n'est pas rectangle en  $M$ , le point  $M$  ne peut être le point  $J$ . Puisque la droite  $(MJ) = (BJ)$  est perpendiculaire à la droite  $(AC) = (JC)$ , le point  $J$  est nécessairement sur le cercle de diamètre  $[MC]$  et aussi sur la droite  $(BM)$ . Le point  $J$  est donc nécessairement le point d'intersection distinct de  $M$  du cercle de diamètre  $[MC]$  et de la droite  $(MB)$ . Ceci assure l'unicité d'un point  $J$  tel que  $(BM) \perp (CJ)$ . Réciproquement, le cercle de diamètre  $[MC]$  et la droite  $(MB)$  ont le point  $M$  en commun. S'ils n'ont que le point  $M$  en commun, la droite  $(MB)$  est tangente en  $M$  au cercle diamètre  $[MC]$  et donc la droite  $(MB)$  est perpendiculaire à la droite  $(MC)$  ce qui n'est pas. Donc la droite  $(MB)$  coupe le cercle de diamètre  $[MC]$  en un point  $J$  distinct de  $M$ . Ce point d'intersection n'est pas le point  $C$  car les points  $M, B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Ainsi, le point  $J$  est tel que  $(BM) \perp (CJ)$ . En résumé, il existe un point  $J$  et un seul tel que  $(BM) \perp (CJ)$ .

Le point  $A$  est nécessairement sur la droite  $(MI)$  et sur la droite  $(CJ)$ . Si ces droites sont parallèles, la droite  $(CJ)$  est perpendiculaire à la droite  $(BC)$  et à la droite  $(BJ)$ . On en déduit que les droites  $(BJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles puis confondues. En particulier, le point  $M$  est sur la droite  $(BC)$  ce qui n'est pas.

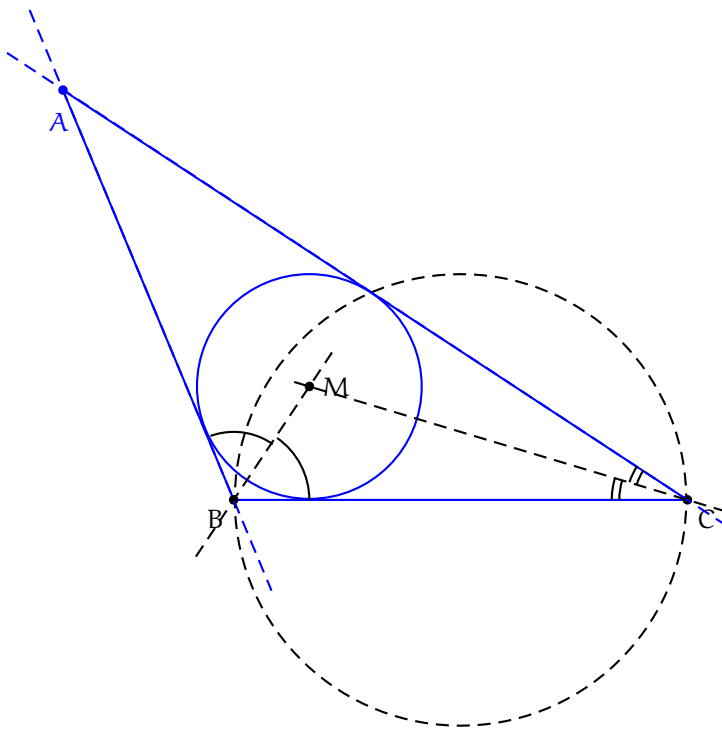
Donc les droites  $(CJ)$  et  $(MI)$  sont sécantes ce qui assure l'unicité du point  $A$ . Réciproquement, le point  $A$  ainsi défini est tel que  $(MA) \perp (BC)$  et  $(MB) \perp (AC)$ . Donc le point  $M$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ . Ceci assure l'existence du point  $A$ .

Dans tous les cas, il existe un point  $A$  et un seul tel que  $M$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .



**4. Unicité.** On sait que  $M$  doit être le point de concours des bissectrices du triangle  $ABC$ . Soient  $(D_B)$  et  $(D_C)$  les symétriques respectives de la droite  $(BC)$  par rapport aux droites  $(MB)$  et  $(MC)$ . Le point  $A$  est nécessairement sur  $(D_B)$  et  $(D_C)$ . Maintenant, ces deux droites ne sont pas confondues.

En effet, dans le cas contraire, puisque  $B \in (D_B)$  et  $C \in (D_C)$ , on aurait  $s_{(MB)}((BC)) = (D_B) = (BC)$  et donc  $M \in (BC)$  ce qui n'est pas. Donc,  $(D_B)$  et  $(D_C)$  sont ou bien strictement parallèles, ou bien sécantes ce qui assure l'unicité du point  $A$ .



**Existence.** Puisque le point  $M$  doit être le point de concours des bissectrices du triangle  $ABC$ , on doit avoir

$$0 < \widehat{CBM} + \widehat{BCM} = \frac{1}{2} (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} < 90^\circ.$$

Cette condition équivaut à  $90^\circ < \widehat{BMC} < 180^\circ$  ou encore  $M$  est strictement à l'intérieur du cercle de diamètre  $[BC]$ . Si cette condition n'est pas réalisée, le problème n'a pas de solution. Supposons dorénavant que  $M$  est strictement intérieur au cercle de diamètre  $[BC]$ .

Dans ce cas, les droites  $(D_B)$  et  $(D_C)$  sont sécantes en un point  $A$  et le point  $M$  est intérieur au triangle  $ABC$ . Puisque  $M$  est le point de concours de deux des trois bissectrices du triangle  $ABC$ ,  $M$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $ABC$ . Ceci assure l'existence de  $A$  quand la condition «  $M$  est strictement intérieur au cercle de diamètre  $[BC]$  » est réalisée.

## Problème 2 : autour du théorème des valeurs intermédiaires

### Partie I : préliminaires

1. Soit  $w$  une suite réelle décroissante, convergente de limite  $\ell$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $w_{n_0} < \ell$ . Puisque la suite  $w$  est décroissante, pour  $n \geq n_0$  on a  $w_n \leq w_{n_0} < \ell$ . Par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell \leq w_{n_0} < \ell$  ce qui est impossible. Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq \ell$ .

### 2. Théorème des suites adjacentes

2.1 La suite  $u$  est croissante et donc la suite  $-u$  est décroissante puis la suite  $v - u$  est décroissante en tant que somme de deux suites décroissantes.

2.2 La suite  $v - u$  est décroissante et converge vers 0. Donc d'après la question 1,  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geq 0$ .

2.3 Pour tout entier  $n$ ,  $v_n \geq u_n \geq u_0$ . Donc la suite  $v$  est décroissante et minorée par  $u_0$ . On en déduit que la suite  $v$  converge. De même, la suite  $u$  est croissante et majorée par  $v_0$  et donc converge.

2.4 Puisque les suites  $u$  et  $v$  convergent, on peut écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

### 3. Suite et application continue

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est continue en  $\ell$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in X, (|x - \ell| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$ . Puisque la suite  $u$  converge vers  $\ell$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \alpha)$ .

Pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  est un élément de  $X$  tel que  $|u_n - \ell| < \alpha$  et donc tel que  $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$ . On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

et donc la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .

### Partie II : propriété des valeurs intermédiaires

#### 1. Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq a_n \leq b$  et  $a \leq b_n \leq b$ .

• Puisque  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ , ces encadrements sont vrais quand  $n = 0$ .

Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $a \leq a_n \leq b$  et  $a \leq b_n \leq b$ .

Alors,  $a = \frac{a+a}{2} \leq \frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1} \leq \frac{b+b}{2} = b$ . Donc, si  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$  ou si  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et  $a_{n+1} = a_n$ , on a  $a \leq a_{n+1} \leq b$  et  $a \leq b_{n+1} \leq b$ .

On a montré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [a, b]$  et  $b_n \in [a, b]$ .

1.2 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans le premier cas, on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$  et dans le deuxième cas, on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ .

1.3 Par suite,  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ . Il reste à vérifier que la suite  $a$  est croissante et la suite  $b$  est décroissante.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_{n+1} - a_n = 0$  ou  $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \geq 0$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0$  et donc la suite  $a$  est croissante.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $b_{n+1} - b_n = 0$  ou  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = -\frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$ . Donc la suite  $b$  est décroissante.

Finalement, les suites  $a$  et  $b$  sont adjacentes.

1.4 Le résultat est immédiat si  $\lambda = f(a)$  ( $c = a$  convient) ou si  $\lambda = b$  ( $c = b$  convient). On suppose dorénavant  $f(a) < \lambda < f(b)$ .

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < \lambda$  et  $f(b_n) \geq \lambda$ .

• Puisque  $f(a_0) = f(a) < \lambda < f(b) = f(b_0)$ , l'encadrement est vrai quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $f(a_n) < \lambda$  et  $f(b_n) \geq \lambda$ .

Si  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$ , alors  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et donc  $f(a_{n+1}) < \lambda$ . Sinon,  $a_{n+1} = a_n$  et donc  $f(a_{n+1}) < \lambda$ .

De même, si  $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq \lambda$ , alors  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et donc  $f(b_{n+1}) \geq \lambda$ . Sinon,  $b_{n+1} = b_n$  et donc  $f(b_{n+1}) \geq \lambda$ .

Le résultat est démontré par récurrence.

Puisque les suites  $a$  et  $b$  sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune que l'on note  $c$ . De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b$ . Puisque  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , les suites  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  convergent vers  $f(c)$ .

Maintenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f(a_n) < \lambda \leq f(b_n)$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $f(c) \leq \lambda \leq f(c)$  et donc  $f(c) = \lambda$ . Ainsi, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ .

## 2. Application 1 : un théorème de point fixe

Pour  $x \in [a, b]$ , posons  $g(x) = f(x) - x$ .  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et de plus  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  (car  $f(a) \in [a, b]$ ) et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$  ou encore tel que  $f(c) = c$ .

## 3. Application 2 : première formule de la moyenne

$g$  est continue et positive sur  $[a, b]$  et donc  $\int_a^b g(x) dx \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $g$  est nulle.

Si  $g$  est nulle,  $c = a$  convient. Sinon,  $g$  est non nulle et  $\int_a^b g(x) dx > 0$ .  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et donc admet un minimum  $m$  et un maximum  $M$  sur ce segment. Pour tout réel  $x$  de  $[a, b]$ , on a  $m \leq f(x) \leq M$  puis  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$  puisque  $g$  est positive sur  $[a, b]$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que  $m \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$  et donc, puisque  $\int_a^b g(x) dx > 0$ ,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Puisque  $m$  et  $M$  sont des valeurs prises par la fonction  $f$ , continue sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires nous

permet d'affirmer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(c)$  et donc tel que  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$ .

## 4. Application 3

**4.1** Le résultat est immédiat si  $n = 1$  car  $c_1 = 0$  convient. On suppose dorénavant  $n \geq 2$ .

Puisque  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_n$  définie dans l'énoncé est continue sur  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ . Ensuite,

$$0 = f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Si l'un des termes de la somme précédente est nulle, alors il existe  $c_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  tel que  $f_n(c_n) = 0$ . Sinon,  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$f_n\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0$  et puisque  $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ , les  $f_n\left(\frac{k}{n}\right)$  ne peuvent être tous de même signe. Dans ce cas, la fonction  $f_n$

prend au moins une valeur strictement négative et une valeur strictement positive sur  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ . Etant de plus continue sur cet intervalle, la fonction  $f_n$  s'annule au moins une fois sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans tous les cas, il existe  $c_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  tel que  $f_n(c_n) = 0$  ou encore tel que  $f_n(c_n) = f_n\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$ .

**4.2** Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ . Avec la fonction  $f$  de l'énoncé, on a  $f(0) = f(1) = 1$ . De plus,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ . Maintenant, pour  $x \in [0, 1 - \alpha]$ ,

$$f(x + \alpha) - f(x) = (-x - \alpha + x) \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1 \right] = \alpha \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \right].$$

Maintenant,  $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$  et donc  $\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \neq 1$  puis  $\alpha \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \right] \neq 0$ . Ainsi,  $f$  est un exemple de fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$  et  $\forall x \in [0, 1 - \alpha]$ ,  $f(x + \alpha) \neq f(x)$ .

## Partie III : réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

### 1. Un exemple

La suite  $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 puis la suite  $\left(f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 1 qui n'est pas  $f(0)$ . Le théorème de la question 3 de la partie I montre que  $f$  ne peut être continue en 0.

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Si  $0 \notin [a, b]$ ,  $f$  est continue sur  $5a, b]$  et vérifie donc la propriété  $\mathcal{P}$ . Supposons maintenant que  $0 \in [a, b]$ . Vérifions que  $f([a, b]) = [-1, 1]$ . Puisque la fonction  $f$  est impaire, on supposera sans perte de généralité que  $a \leq 0 < b$ .

Soient  $\alpha \in [-1, 1]$  puis  $\theta = \text{Arcsin } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . La suite  $\left(\frac{1}{\theta + 2n\pi}\right)_{n \geq 1}$  est strictement positive et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a \leq 0 < \frac{1}{\theta + 2n_0\pi} \leq b$ . Soit  $x = \frac{1}{\theta + 2n_0\pi}$ . Alors  $x \in [a, b]$  et  $f(x) = \sin(\theta + 2n_0\pi) = \sin(\theta) = \sin(\text{Arcsin } \alpha) = \alpha$ .

En résumé,  $\forall \alpha \in [-1, 1], \exists x \in [a, b] / f(x) = \alpha$ . En particulier, puisque  $-1 \leq f(a) \leq 1$  et  $-1 \leq f(b) \leq 1$ , pour tout réel  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ . Donc,  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  sur tout segment de  $\mathbb{R}$  bien que n'étant pas continue en 0.

### 2. Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$ : un théorème de Darboux

**2.1**  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et il en est de même de la fonction  $g$ . Par suite,  $g$  admet un minimum sur  $[a, b]$  ou encore il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$ .

**2.2** Si  $c = a$ , alors pour tout réel  $x$  de  $]a, b]$ ,  $f(x) - \lambda x = g(x) \geq g(a) = f(a) - \lambda a$  puis  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \lambda$ . Quand  $x$  tend vers  $a$ , on obtient  $f'(a) \geq \lambda$  ce qui n'est pas. Donc  $c \neq a$ .

De même, si  $c = b$ , alors pour tout réel  $x$  de  $[a, b[$ ,  $f(x) - \lambda x \geq f(b) - \lambda b$  puis  $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq \lambda$  puis  $f'(b) \leq \lambda$  ce qui n'est pas. Donc  $c \neq b$ .

**2.3** La fonction  $g$  est dérivable sur  $[a, b]$  et atteint son minimum en  $c \in ]a, b[$ . On sait alors que  $g'(c) = 0$  ce qui fournit  $f'(c) = \lambda$ .

**2.4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .  $f$  prend les valeurs 0 et 1 mais ne prend aucune valeur dans  $]0, 1[$ . Puisqu'une fonction dérivée vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ ,  $f$  ne peut être la dérivée d'une certaine fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  n'admet pas de primitive sur  $\mathbb{R}$ .

### 3. Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ soit continue

On note tout d'abord que, puisque les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles, la propriété  $\mathcal{P}$  équivaut à la propriété « l'image d'un intervalle par  $f$  est un intervalle ».

Soient  $x_0 \in I$  et  $\varepsilon > 0$ . Soient  $F = f^{-1}(\{f(x_0) - \varepsilon\})$  et  $F' = f^{-1}(\{f(x_0) + \varepsilon\})$ . Par hypothèse,  $F$  et  $F'$  sont deux fermés de  $I$  et ces deux fermés ne contiennent pas  $x_0$ . Donc  $x_0$  est dans  $U = (I \setminus F) \cap (I \setminus F')$ . Puisque  $F$  et  $F'$  sont deux fermés de  $I$ ,  $I \setminus F$  et  $I \setminus F'$  sont deux ouverts de  $I$  et il en est de même de  $U$ . Par suite, il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \subset U$ .  $I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  est un intervalle non vide contenant  $x_0$  et puisque  $f$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ ,  $f(I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)$  est un intervalle. Maintenant,  $f(I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)$  contient  $f(x_0)$  et ne contient pas  $f(x_0) - \varepsilon$  et  $f(x_0) + \varepsilon$ . Par suite,  $f(I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[) \subset ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ .

On a montré que  $\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in I), (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$  et donc  $f$  est continue sur  $I$ .

## Problème 3 : quelques propriétés des polynômes de Laguerre

### Partie I : étude de la famille $(L_n)$

**1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $h_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $h_n$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc  $L_n$  est bien défini.

**2.** Pour tout réel  $x$ ,  $h_0(x) = e^{-x}$  puis  $L_0(x) = e^x e^{-x} = 1$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $h_1(x) = x e^{-x}$  puis  $h_1'(x) = -x e^{-x} + e^{-x}$  puis  $L_1(x) = e^x (-x e^{-x} + e^{-x}) = -x + 1$ .

D'après la formule de LEIBNIZ, pour tout réel  $x$ ,  $h_2''(x) = x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + 2e^{-x}$  et donc  $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ .

### 3. Programme en MAPLE.

```

restart ; P :=(n,x)-> if n=0 then 1 else exp(x)/n!*diff(x)^n*exp(-x),x$n end if;
P;
P(n,x);
poly :=proc(n)
local i :
for i from 1 to n do
L[i](x)=sort(expand(P(i,x)),x);
end do;
end proc;

```

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la formule de LEIBNIZ

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)} = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

En particulier,  $L_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

5.1 Pour tout réel  $x$ ,  $h_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$  puis  $h_n^{(n+1)}(x) = n!(-L_n(x) + L_n'(x))e^{-x}$ .

5.2 Pour tout réel  $x$ ,  $h_{n+1}(x) = xh_n(x)$ .

5.3 Pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 L_{n+1}(x) &= \frac{e^x}{(n+1)!} h_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!} (xh_n)^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!} (xh_n^{(n+1)}(x) + (n+1)h_n^{(n)}(x)) \\
 &= \frac{e^x}{(n+1)!} (xn!e^{-x}(-L_n(x) + L_n'(x)) + (n+1)n!e^{-x}L_n(x)) = \frac{x}{n+1} (-L_n(x) + L_n'(x)) + L_n(x) \\
 &= \frac{x}{n+1} L_n'(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x).
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = \frac{x}{n+1} L_n' + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n.$$

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$(h_{n+1}^{(n+1)})'(x) = (n+1)!(e^{-x}L_{n+1})'(x) = (n+1)!(-L_{n+1}(x) + L_{n+1}'(x))e^{-x}.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned}
 (h_{n+1}^{(n+1)})'(x) &= (h_{n+1}'^{(n+1)})(x) = (-x^{n+1}e^{-x} + (n+1)x^n e^{-x})^{(n+1)}(x) = (-h_{n+1} + (n+1)h_n)^{(n+1)}(x) \\
 &= -(n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x) + (n+1) \times n!(-L_n(x) + L_n'(x))e^{-x}.
 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient  $-L_{n+1} + L_{n+1}' = -L_{n+1} - L_n + L_n'$  et donc  $L_{n+1}' = L_n' - L_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1}' = L_n' - L_n.$$

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après les questions 5.3 et 6, on a  $L_n' - L_n = L_{n+1}' = \frac{x}{n+1}L_n'' + \frac{1}{n+1}L_n' - \frac{1}{n+1}L_n + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n'$

et donc  $\frac{x}{n+1}L_n'' + \frac{1-x}{n+1}L_n' + \frac{n}{n+1}L_n = 0$  ou encore  $xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 5.3,

$$(n+1)L_{n+1} + (X-n-1)L_n = XL'_n \text{ et aussi } nL_n + (X-n)L_{n-1} = XL'_{n-1}.$$

On retranche membre à membre ces deux égalités et d'après la question 6, on obtient

$$(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n - (X-n)L_{n-1} = X(L'_n - L'_{n-1}) = -XL_{n-1},$$

et donc  $(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0.$$

## Partie II : application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. On a vu à la question 4. de la partie I que

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k.$$

2.

2.1  $f(x) \underset{x \rightarrow 0, x \neq 0}{=} x^{n+2} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \underset{x \rightarrow 0, x \neq 0}{=} x^{n+2} O(1) \underset{x \rightarrow 0, x \neq 0}{=} o(x^{n+1})$  et en tenant compte de  $f(0) = 0$ ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1}).$$

Maintenant,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux et pour  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (n+2)x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1) \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

D'autre part,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1})$  et puisque  $n+1 \geq 1$ , on a en particulier,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ . Ainsi,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que  $f$  est dérivable en 0 puis que  $f'(0) = 0$ .

Finalement,  $f$  est dérivable que  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1) \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

Vérifions maintenant que  $f'$  n'admet pas un développement limité d'ordre 0 en 0 ou encore, vérifions que  $f'$  n'a pas de limite réelle en 0.

Puisque  $\left| (n+2)x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \right| \leq (n+2)|x|^{n+1}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} (n+2)x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x)$  existe si et seulement si la fonction  $g : x \mapsto -(n+1) \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$  a une limite réelle en 0.

Les deux suites  $u_p = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2p\pi}}$  et  $v_p = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\frac{\pi}{2} + 2p\pi}}$  tendent vers 0 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ . De plus,

$$g(u_p) = -(n+1) \rightarrow -(n+1) \text{ et } g(v_p) = 0 \rightarrow 0 \neq -(n+1).$$

On en déduit que la fonction  $g$  n'a pas de limite en 0 puis que la fonction  $f'$  n'a pas de limite réelle en 0. Finalement, la fonction  $f'$  n'admet pas un développement limité d'ordre 0 en 0.

2.2 Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en 0, alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(n-k)}$  est  $k$  fois dérivable en 0 et en particulier, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(n-k)}$  admet un développement limité d'ordre  $k$  en 0, son développement de TAYLOR-YOUNG. On note que la partie régulière du développement limité à l'ordre  $k$  en 0 de  $f^{(n-k)}$  s'obtient en dérivant  $n-k$  fois la partie régulière du développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de la fonction  $f$ .

3.

3.1  $h_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier,  $h_n$  admet un développement limité à tout ordre en 0. Ensuite,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x^n \left( \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^N) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{k+n}}{k!} + o(x^{n+N}).$$

3.2 En dérivant  $n$  fois, on obtient

$$h_n^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} \frac{x^k}{k!} + o(x^N).$$

3.3 Ensuite,

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} \frac{x^k}{k!} + o(x^N) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{k!} + o(x^N) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^N \left( \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+k}{k} \frac{1}{(p-k)!} \right) x^p + o(x^N) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^N \left( \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} \right) x^p + o(x^N). \end{aligned}$$

3.4 On impose de plus  $N \geq n$ . On a vu que  $L_n = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!} \binom{n}{p} x^p$ . En particulier,

$$L_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{p!} \binom{n}{p} x^p + o(x^N) \quad (\text{car } N \geq n).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \frac{(-1)^p}{p!} \binom{n}{p}$

si  $p \leq n$  et  $\frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = 0$  si  $p > n$ . Finalement

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \binom{n}{p} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.$$

### Partie III : étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

1. Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ . La fonction  $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus, d'après un théorème de croissances comparées,  $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . On en déduit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$  est absolument convergente et donc convergente puis que  $\varphi(P, Q)$  existe dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $\varphi$  est bien définie sur  $(\mathbb{R}[X])^2$ .

2. • D'après la question précédente,  $\varphi$  est une application de  $(\mathbb{R}[X])^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

• Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ .  $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x} dx = \varphi(Q, P)$ . Donc  $\varphi$  est symétrique.

• Soient  $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}[X])^3$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ . Puisque les intégrales  $\int_0^{+\infty} P_1(x)Q(x)e^{-x} dx$  et  $\int_0^{+\infty} P_2(x)Q(x)e^{-x} dx$  sont convergentes, on sait que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x))Q(x)e^{-x} dx$  est convergente puis, par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi(P_1, Q) + \lambda_2 \varphi(P_2, Q) &= \lambda_1 \int_0^{+\infty} P_1(x)Q(x)e^{-x} dx + \lambda_2 \int_0^{+\infty} P_2(x)Q(x)e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x))Q(x)e^{-x} dx = \varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q). \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie,  $\varphi$  est bilinéaire. En résumé,  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $(\mathbb{R}[X])^2$ .

• Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Par positivité de l'intégrale,  $\varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} P^2(x) dx \geq 0$ . De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x} dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, +\infty[, P^2(x)e^{-x} = 0 \quad (\text{fonction continue, positive, d'intégrale nulle}) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [0, +\infty[, P(x) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \quad (\text{polynôme ayant une infinité de racines}). \end{aligned}$$

Finalement,  $\varphi$  est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur  $\mathbb{R}[X]$  et donc  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \varphi(L_0, X^n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $A > 0$ . Les deux fonctions  $x \mapsto x^{n+1}$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A x^{n+1} e^{-x} dx = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^A + (n+1) \int_0^A x^n e^{-x} dx = -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-x} dx.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{n+1} e^{-A} = 0$  et donc, quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $I_{n+1} = (n+1)I_n$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = (n+1)I_n$  et donc, en tenant compte de  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ , on en déduit par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = n!$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(L_0, X^n) = n!}$$

**4. 4.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le résultat est clair quand  $n = 0$  avec  $Q_0 = 1$ . On suppose dorénavant  $n \geq 1$ .

Montrons par récurrence finie que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\exists Q_k \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}, h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x)$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $h_n^{(0)}(x) = h_n(x) = x^n e^{-x} = x^{n-0} e^{-x} \times 1$ . Le résultat est donc vrai pour  $k = 0$  avec  $Q_0 = 1$ .
- Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Supposons que  $\exists Q_k \in \mathbb{R}[X] / \forall x \in \mathbb{R}, h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x)$ . Alors, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} h_n^{(k+1)}(x) &= (n-k)x^{n-k-1} e^{-x} Q_k(x) - x^{n-k} e^{-x} Q_k(x) + x^{n-k} e^{-x} Q_k'(x) = x^{n-k-1} e^{-x} ((n-k-x)Q_k(x) + xQ_k'(x)) \\ &= x^{n-(k+1)} e^{-x} Q_{k+1}(x) \end{aligned}$$

avec  $Q_{k+1} = (n-k-X)Q_k + xQ_k' \in \mathbb{R}[X]$ .

Le résultat est démontré par récurrence.

**4.2** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $n = 0$ ,  $\varphi(L_0, P) = \int_0^{+\infty} L_0(x)P(x)e^{-x} dx = \frac{(-1)^0}{0!} \int_0^{+\infty} h_0^{(0)}(x)P^{(0)}(x) dx$ . Le résultat est donc vrai quand  $n = 0$ . On suppose dorénavant  $n \geq 1$ .

Montrons par récurrence que  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x) dx$ .

- $\varphi(L_n, P) = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)P(x)e^{-x} dx = \frac{(-1)^0}{n!} h_n^{(n-0)}(x)P(x) dx$ . Le résultat est donc vrai quand  $p = 0$ .
- Soit  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Supposons que  $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x) dx$ . Soit  $A > 0$ . Les deux fonctions  $h_n^{(n-p-1)}$  et  $P^{(p)}$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^A h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x) dx &= \frac{(-1)^p}{n!} \left( \left[ h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p)}(x) \right]_0^A - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x) dx \right) \\ &= \frac{(-1)^p}{n!} \left( A^{p+1} e^{-A} Q_{n-p-1}(A) - 0^{p+1} e^0 Q_{n-p-1}(0) - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x) dx \right) \quad (\text{d'après 4.1}) \\ &= \frac{(-1)^p}{n!} \left( A^{p+1} e^{-A} Q_{n-p-1}(A) - \int_0^A h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x) dx \right) \quad (\text{car } p+1 \geq 1). \end{aligned}$$

Maintenant, d'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{p+1} e^{-A} Q_{n-p-1}(A) = 0$  et donc, quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \times \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p-1)}(x)P^{(p+1)}(x) dx = \frac{(-1)^{p+1}}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x)P^{(p+1)}(x) dx.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

**5.** En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x)P^{(n)}(x) dx$ .

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels tels que  $m < n$ . Alors, puisque  $L_m$  est un polynôme de degré  $m < n$ ,  $\varphi(L_n, L_m) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x)L_m^{(n)}(x) dx = 0$ . On en déduit que les polynômes  $L_n$  sont deux à deux orthogonaux.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question II.1,  $L_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  et de coefficient dominant  $\frac{(-1)^n}{n!}$ . Donc

$$\begin{aligned} \varphi(L_n, L_n) &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) L_n^{(n)}(x) \, dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \times n! \times \frac{(-1)^n}{n!} \, dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = 1 \text{ (d'après la question III.3).} \end{aligned}$$

Finalement,  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\varphi(L_n, L_m) = \delta_{n,m}$  et donc

$(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormée de  $(\mathbb{R}[X], \varphi)$ .