

# Planche n° 1. Algèbre linéaire I

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\* I) :** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .  
Montrer que :  $[(F \cup G \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)]$ .

**n° 2 (\*\*\*\*) :** Généralisation. Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 puis  $F_1, \dots, F_n$   $n$  sous-espaces de  $E$  où  $E$  est un espace vectoriel sur un sous-corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $\left[ (F_1 \cup \dots \cup F_n \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (\text{il existe } i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \bigcup_{j \neq i} F_j \subset F_i) \right]$ .

**n° 3 (\*\* I) :**  $E = \mathbb{K}^n$  où  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .  
Soient  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in E / x_1 + \dots + x_n = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, \dots, 1))$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ . Préciser le projeté d'un vecteur  $x$  de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  et sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

## Techniques de démonstration d'indépendance (du n° 4 au n° 12).

**n° 4 (\*\*) :** Les familles suivantes de  $\mathbb{R}^4$  sont-elles libres ou liées? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

- 1)  $(e_1, e_2, e_3)$  où  $e_1 = (3, 0, 1, -2)$ ,  $e_2 = (1, 5, 0, -1)$  et  $e_3 = (7, 5, 2, 1)$ .
- 2)  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  où  $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 1, -1)$ ,  $e_3 = (1, 1, -1, 1)$  et  $e_4 = (1, -1, 1, 1)$ .
- 3)  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  où  $e_1 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $e_3 = (1, 0, 0, 0)$  et  $e_4 = (0, 1, 0, 0)$ .
- 4)  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  où  $e_1 = (2, -1, 3, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $e_3 = (4, 1, 5, 3)$  et  $e_4 = (1, -2, 2, 0)$ .

**n° 5 (\*\*\*\*) :** Montrer que  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  est une famille libre du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .

**n° 6 (\*\*) :** Soit  $f(x) = \ln(1+x)$  pour  $x$  réel positif. Soient  $f_1 = f$ ,  $f_2 = f \circ f$  et  $f_3 = f \circ f \circ f$ . Etudier la liberté de  $(f_1, f_2, f_3)$  dans  $[0, +\infty[^{[0, +\infty[}$ .

**n° 7 (\*\*) :** Soit  $f_a(x) = |x - a|$  pour  $a$  et  $x$  réels. Etudier la liberté de la famille  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ .

**n° 8 (\*\*I) :** On pose  $f_a(x) = e^{ax}$  pour  $a$  et  $x$  réels. Etudier la liberté de la famille de fonctions  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ .

**n° 9 (\*\*) :** Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.  
Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

**n° 10 (\*\*I) :**  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ . Montrer que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $E$ .

## n° 11 (\*\*I) : (Polynômes d'interpolation de LAGRANGE)

Soient  $a_0, \dots, a_n$   $n+1$  nombres complexes deux à deux distincts et  $b_0, \dots, b_n$   $n+1$  nombres complexes.  
Montrer qu'il existe une unique famille de  $n+1$  polynômes à coefficients complexes de degré  $n$  exactement vérifiant  $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.

Montrer que la famille  $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  vérifiant  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$ . Expliciter  $P$  puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

**n° 12 (\*\*) :** 1) Calculer pour  $p$  et  $q$  entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$J(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx, K(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) dx \text{ et } L(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx.$$

2) Montrer que la famille de fonctions  $(\cos(px))_{p \in \mathbb{N}} \cup (\sin(qx))_{q \in \mathbb{N}^*}$  est libre.

**n° 13 (\*\*\*\*I) :** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .  
Démontrer que  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

**n° 14 (\*\*)** : Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .  
 Montrer que :  $\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H)$ .  
 Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

**n° 15 (\*\*\*)** : Soient  $F_1, F_2, \dots, F_n$   $n$  sous-espaces vectoriels d'un espace  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  ( $n \geq 2$ ).  
 Montrer que  $\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \dim F_1 + \dots + \dim F_n$  avec égalité si et seulement si la somme est directe.

**n° 16 (\*\*I)** : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 3$ . Montrer que l'intersection de  $n - 1$  hyperplans de  $E$  est non nulle.

**n° 17 (\*\*)** : Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de rang  $r$  et  $(x_1, \dots, x_m)$  une sous famille de rang  $s$  ( $m \leq n$  et  $s \leq r$ ). Montrer que  $s \geq r + m - n$ . Cas d'égalité ?

**n° 18 (\*\*)** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Montrer que  $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ .

**n° 19 (\*\*)** : Soient  $E, F$  et  $G$ , trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels puis  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .  
 Montrer que  $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$ .

**n° 20 (\*\*\*)** : Soient  $E$  un espace de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Condition nécessaire et suffisante sur  $F$  et  $G$  pour qu'il existe un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $F = \operatorname{Ker} f$  et  $G = \operatorname{Im} f$ .

**n° 21 (\*\*\*)** : Soient  $E$  un espace vectoriel non nul de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .  
 Montrer que : **1)** ( $f$  non injective)  $\Leftrightarrow (f = 0$  ou  $f$  diviseur de zéro à gauche).  
**2)** ( $f$  non surjective)  $\Leftrightarrow (f = 0$  ou  $f$  diviseur de zéro à droite).

**n° 22 (\*\*\*) I)** : Soient  $E$  un espace de dimension finie  $n$  non nulle et  $f$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ . Montrer que  $f^n = 0$ .

**n° 23 (\*\*\*) I)** : Soient  $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  telles que  $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Justifier l'existence de  $A$  et  $B$  puis calculer  $BA$ .

**n° 24 (\*\*I)** : (Noyaux itérés)

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$  et  $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$  puis  $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$  et  $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ . ( $N$  est le nilspace de  $f$  et  $I$  le cœur de  $f$ )

- 1) a) Montrer que les suites  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.  
 b) Montrer que  $N$  et  $I$  sont stables par  $f$ .  
 c) Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$ .
- 2) On suppose de plus que  $\dim E = n$  entier naturel non nul.  
 a) Soit  $A = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$  et  $B = \{k \in \mathbb{N} / I_k = I_{k+1}\}$ . Montrer qu'il existe un entier  $p \leq n$  tel que  $A = B = \{k \in \mathbb{N} / k \geq p\}$ .  
 b) Montrer que  $E = N_p \oplus I_p$ .  
 c) Montrer que  $f|_N$  est nilpotent et que  $f|_I \in \operatorname{GL}(I)$ .
- 3) Trouver des exemples où a)  $A$  est vide et  $B$  est non vide b)  $A$  est non vide et  $B$  est vide c) (\*\*\*)  $A$  et  $B$  sont vides.
- 4) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $d_k = \dim(I_k)$ . Montrer que la suite  $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**n° 25 (\*\*\*) I)** : Soit  $E$  un espace vectoriel non nul. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que pour tout vecteur  $x$  de  $E$  la famille  $(x, f(x))$  soit liée. Montrer que  $f$  est une homothétie.

**n° 26 (\*\*\*) I)** : Soit  $E$  un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de  $E$  qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de  $E$ .

**n° 27 (\*\*I)** : Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$ .  
 Montrer que  $(p + q \text{ projecteur}) \Leftrightarrow (p \circ q = q \circ p = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(q) \text{ et } \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Ker}(p))$ .  
 Dans le cas où  $p + q$  est un projecteur, déterminer  $\operatorname{Ker}(p + q)$  et  $\operatorname{Im}(p + q)$ .

**n° 28 (\*\*I)** : Soit  $E$  un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

**n° 29 (\*\*\*\*)** : Soient  $p_1, \dots, p_n$   $n$  projecteurs d'un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie. Montrer que  $(p_1 + \dots + p_n \text{ projecteur}) \Leftrightarrow \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$ .

**n° 30 (\*\*\*)** : Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie  $n$ . Soient  $p_1, \dots, p_n$   $n$  projecteurs non nuls de  $E$  tels que  $\forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$ .

1) Montrer que tous les  $p_i$  sont de rang 1.

2) Soient  $q_1, \dots, q_n$   $n$  projecteurs vérifiant les mêmes égalités. Montrer qu'il existe un automorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$ .

**n° 31 (\*\*\*)** : Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathcal{GL}(E)$  de cardinal  $n$ . Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par tous les éléments de  $G$  et  $p$  un projecteur d'image  $F$ . Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}$  est un projecteur d'image  $F$ .

**n° 32 (\*\*\*)** : Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $\sum_{M \in G} \text{Tr}(M) = 0$ . Montrer que  $\sum_{M \in G} M = 0$ .

**n° 33 (\*\*\*)** : Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(E)$  avec  $\dim E = n$  et  $\text{card} G = p$ . Soit  $F = \{x \in E / \forall g \in G, g(x) = x\}$ . Montrer que  $\dim F = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \text{Tr} g$ .

**n° 34 (\*\*\*)** : Soient  $A_1, \dots, A_p$   $p$  matrices distinctes et inversibles de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $G = \{A_1, \dots, A_p\}$  soit stable pour la multiplication. Soit  $A = A_1 + \dots + A_p$ . Montrer que  $\text{Tr} A$  est un entier divisible par  $p$ .

**n° 35 (\*\*\*\*)** : Montrer que tout hyperplan de  $M_n(\mathbb{R})$  contient des matrices inversibles.