Planche n° 1. Algèbre linéaire I. Corrigé

n° 1 : $\Leftarrow$) Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$. Dans tous les cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.

$\Rightarrow$) Supposons que $F \not\subset G$ et que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $G \subset F$.
F n ?est pas inclus dans G et donc il existe x élément de E qui est dans F et pas dans G.
Soit y un élément de G. $x + y$ est dans $F \cup G$ car x et y y sont et car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $x + y$ est élément de G alors $x = (x + y) - y$ l ?est aussi ce qui est exclu. Donc $x + y$ est élément de F et par suite $y = (x + y) - x$ est encore dans F. Ainsi, tout élément de G est dans F et donc $G \subset F$.

n° 2 : $\Leftarrow$) Immédiat .

$\Rightarrow$) On raisonne par récurrence sur n.
Pour $n = 2$, c'est l'exercice n° 1.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons que toute réunion de n sous-espaces de E est un sous-espace de E si et seulement si l'un de ces sous-espaces contient tous les autres.
Soient F_1,..., F_n, F_{n+1} $n+1$ sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \cup ... \cup F_{n+1}$ soit un sous-espace vectoriel de E. Posons $F = F_1 \cup ... \cup F_n$.

- Si F_{n+1} contient F, c'est fini.
- Si $F_{n+1} \subset F$, alors $= F_1 \cup ... \cup F_n = F_1 \cup ... \cup F_n \cup F_{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de E. Par hypothèse de récurrence, F est l'un des F_i pour un certain i élément de $[\![1, n]\!]$. $F_i = F$ contient également F_{n+1} et contient donc tous les F_j pour j élément de $[\![1, n+1]\!]$.
- Supposons dorénavant que $F \not\subset F_{n+1}$ et que $F_{n+1} \not\subset F$ et montrons que cette situation est impossible.

Il existe un vecteur x qui est dans F_{n+1} et pas dans F et un vecteur y qui est dans F et pas dans F_{n+1}.
Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $y - \lambda x$ est un élément de $F \cup F_{n+1}$ (puisque $F \cup F_{n+1}$ est un sous-espace) mais $y - \lambda x$ n'est pas dans F_{n+1} car alors $y = (y - \lambda x) + \lambda x$ y serait ce qui n'est pas.
Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y - \lambda x \in F$. On en déduit que pour tout scalaire λ, il existe un indice $i(\lambda)$ élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x \in F_{i(\lambda)}$. Remarquons enfin que si $\lambda \neq \mu$ alors $i(\lambda) \neq i(\mu)$. En effet, si pour λ et μ deux scalaires distincts donnés, il existe un indice i élément de $[\![1, n]\!]$ tel que $y - \lambda x$ et $y - \mu x$ soient dans F_i, alors $x = \dfrac{(y - \mu x) - (y - \lambda x)}{\mu - \lambda}$ est encore dans F_i et donc dans F, ce qui n'est pas.
Comme l'ensemble des scalaires est infini et que l'ensemble des indices ne l'est pas, on vient de montrer que cette dernière situation n'est pas possible, ce qui achève la démonstration .

n° 3 : **1ère solution.** F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E et est donc un hyperplan de E.
Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un élément de $F \cap G$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = (\lambda, ..., \lambda)$ et $n\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. De plus $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 1 = n = \dim(E) < +\infty$ et donc $F \oplus G = E$.
Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - (\lambda, ..., \lambda) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \lambda) + ... + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Le projeté de x sur G parallèlement à F est donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(1, ..., 1)$ et le projeté de x sur F parallèlement à G est $x - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(1, ..., 1)$.

2ème solution (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Posons $\overrightarrow{u} = (1, \ldots, 1)$.
On a $F = \overrightarrow{u}^{\perp} = G^{\perp}$. Par suite, F est le supplémentaire orthogonal de F.
Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur G est $\dfrac{x.u}{\|u\|^2}u = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}(1, \ldots, 1)$.

n° 4 : **1)** La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois dernières équations du système $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$ d'inconnues λ, μ et ν forment un sous-système de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
En développant le déterminant de cette matrice suivant sa première colonne, on obtient $\det(A) = -10 - 2 \times 10 = -30 \neq 0$.
Ce sous-système est de Cramer et admet donc l'unique solution $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$. Par suite, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ (pour } 2 \leqslant i \leqslant 4,\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre (et donc une base de E).

3) Notons (u_1, u_2, u_3, u_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
La famille $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (u_3, u_4, u_1, u_2)$ a même rang que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) c'est-à-dire 4. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

4) La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(e_5 = e_1 - 2e_2,\ e_6 = e_3 - 4e_2$ et $e_7 = e_4 - e_2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(e_8 = e_6 - e_5$ et $e_9 = e_7 - e_5)$.

La matrice ci-dessus est de rang 2. Il en est de même de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$. La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

n° 5 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2 \Rightarrow 2ab\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab = 0$.
Si $b = 0$, puisque $a + c = 0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c = 0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a = 0$ et finalement $a = b = c = 0$.
Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.
On a montré que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

n° 6 : Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.
Soient a, b et c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.

Première solution. Si a est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a \ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a = 0$. Puis si b est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3 = bf_2 + cf_3$ est équivalente à $b \ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b = 0$. Puis $c = 0$.

Deuxième solution. On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ quand x tend vers 0 :

$f_1(x) = \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ puis

$$f_2(x) = \ln(1 + f_1(x)) \underset{x \to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

puis

$$f_3(x) = \ln(1+f_2(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x-x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\right) = \left(x-x^2+\frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x-x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3).$$

Par suite, $af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}\right)x^3 + o(x^3)$. L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ -\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2} \end{array}\right. \text{ ou encore } \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2a+7b+15c=0 \end{array}\right. .$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, on a donc $a=b=c=0$.

n° 7 : Soient n un entier naturel non nul puis $a_1,\ldots, a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ n réels.
Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. On a $\lambda_i f_{a_i} = -\sum_{j\neq i} \lambda_j f_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i \neq 0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en a_i tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les λ_i sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

n° 8 : Soient $a_1 < \ldots < a_n$ n réels deux à deux distincts et $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ n réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$ $(*)$.

Première solution. Après multiplication des deux membres de $(*)$ par $e^{-a_n x}$ puis passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. En réitérant, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$.

Deuxième solution. On note f la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$f = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,,n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = 0$$
$$\Rightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_1 a_1^k + \ldots + \lambda_n a_n^k = 0.$$

Le système prédédent d' inconnues λ_i, $1 \leqslant n$, est un système linéaire homogène à n équations et n inconnues. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde des a_i et est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système est donc de CRAMER et admet l'unique solution $(0,\ldots,0)$.

Troisième solution. (dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x\mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$).
Soient $n_1 < \ldots < n_p$ p entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel x on ait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif t, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ à savoir les λ_i sont tous nuls.

Quatrième solution. (pour les redoublants) L'application φ qui à f de classe C^∞ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour a réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de φ (les f_a sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre .

n° 9 : Soient n un entier naturel non nul puis $P_1,\ldots, P_n$ n polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < \ldots < d_n$.
Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls et posons $k = \mathrm{Max}\{i \in [\![1,n]\!] / \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k = 1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré d_k (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les λ_k sont nuls.
La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

n° 10 : Première solution. Chaque P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, est de degré $k + n - k = n$ et est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Les polynômes P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ ont des valuations deux à deux distinctes et donc constituent une famille libre. Comme de plus $\text{card}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = n + 1 = \dim(E) < +\infty$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

Deuxième solution. La matrice carrée M de la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure. Ses coefficients diagonaux sont tous non nuls car égaux à 1. M est donc inversible et $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.

n° 11 : Unicité. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. L_i doit admettre les n racines deux à deux distinctes a_j où j est différent de i et donc L_i est divisible par le polynôme $\prod_{j\neq i}(X - a_j)$. L_i doit être de degré n et donc il existe un réel non nul λ tel que $L_i = \lambda \prod_{j\neq i}(X - a_j)$. Enfin $L_i(a_i) = 1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$. Ainsi nécessairement $L_i = \prod_{j\neq i} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Existence. Les L_i ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.}$$

Montrons que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
Soient λ_0,..., λ_n $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0 L_0 + ... + \lambda_n L_n = 0$. En particulier, pour un indice i de $[\![0, n]\!]$ donné, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ au vu des égalités définissant les L_j. La famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.
De plus les L_i sont tous dans $\mathbb{C}_n[X]$ et vérifient $\text{card}(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n + 1 = \dim\mathbb{C}_n[X] < +\infty$. Donc la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.
On écrit P dans la base $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$. En prenant la valeur en a_i, i donné dans $[\![0, n]\!]$, on obtient $\lambda_i = P(a_i)$.
D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = P(a_0)L_0 + ... + P(a_n)L_n.}$$

Mais alors : $(\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i) \Rightarrow P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$.
Réciproquement le polynôme $P = b_0 L_0 + ... + b_n L_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ à savoir $P_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X - a_0)...(X - a_n)$ $(\deg(R) = n + 1)$.

$$\begin{aligned}(\forall i \in [\![0, n]\!]\ P(a_i) = b_i) &\Leftrightarrow (\forall i \in [\![0, n]\!]\ P(a_i) = P_0(a_i)) \\ &\Leftrightarrow P - P_0 \text{ admet les } n + 1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0, ..., a_n \\ &\Leftrightarrow P - P_0 \text{ est divisible par } R \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X]/\ P = P_0 + QR.\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les $P_0 + QR$ où Q décrit $\mathbb{C}[X]$.

n° 12 : 1) Pour p et q entiers relatifs, posons $I(p, q) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\,dx$.
Si $p \neq q$, $I(p, q) = \dfrac{1}{i(p - q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors p et q deux entiers naturels.
Donc si $p \neq q$, $J(p, q)\dfrac{1}{2}\text{Re}(I(p, q)+I(p, -q)) = 0$ puis $K(p, q) = \dfrac{1}{2}\text{Im}(I(p, -q)-I(p, q)) = 0$ puis $L(p, q) = \dfrac{1}{2}\text{Re}(I(p, -q)-I(p, q)) = 0$.

Si $p = q$, $J(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et π si $p \neq 0$ puis $K(p,p) = 0$ puis $L(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et 0 si $p = 0$.

2) Sur l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application qui à (f,g) élément de E^2 associe $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de E. Cette famille est donc est libre.

n° 13 : Soit f l'application de $F \times G$ dans E qui à un élément (x,y) de $F \times G$ associe $x + y$.
f est clairement linéaire et d'après le thèorème du rang

$$\dim(F \times G) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) \text{ avec } \dim(FxG) = \dim F + \dim G \text{ et } \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(F + G).$$

Il reste à analyser Kerf.
Soit $(x,y) \in E^2$. (x,y) est élément de Kerf si et seulement si x est dans F, y est dans G et $x + y = 0$ ou encore si et seulement si x et y sont dans $F \cap G$ et $y = -x$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{(x,-x),\ x \in F \cap G\}$.
Montrons enfin que Kerf est isomorphe à $F \cap G$. Soit φ l'application de $F \cap G$ dans Kerf qui à l'élément x de $F \cap G$ associe $(x,-x)$ dans Kerf. φ est clairement une application linéaire, clairement injective et clairement surjective. Donc φ est un isomorphisme de $F \cap G$ sur Kerf et en particulier $\dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(F \cap G)$. Finalement

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

n° 14 :

$$\begin{aligned}\dim(F + G + H) &= \dim((F + G) + H) = \dim(F + G) + \dim H - \dim((F + G) \cap H)\\ &= \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim((F + G) \cap H).\end{aligned}$$

Maintenant , $F \cap H + G \cap H \subset (F + G) \cap H$ (car si x est dans $F \cap H + G \cap H$ il existe y dans F et dans H et z dans G et dans H tel que $x = y + z$ et x est bien dans $F + G$ et aussi dans H). Donc

$$\begin{aligned}\dim((F + G) \cap H) \geqslant \dim(F \cap H + G \cap H) &= \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H) - \dim((F \cap H) \cap (G \cap H))\\ &= \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H) - \dim(F \cap G \cap H)\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\dim(F + G + H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H).}$$

Le cas de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes fournit un cas d'inégalité stricte

n° 15 : Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\dim(F_1 + \ldots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n)$.
• Pour $n = 2$, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_2)$.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons que si $F_1, \ldots, F_n$ sont n sous-espaces de E, $\dim(F_1 + \ldots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_n)$.
Soient $F_1, \ldots, F_{n+1}$ $n + 1$ sous-espaces de E.

$$\begin{aligned}\dim(F_1 + F_2 + ... + F_{n+1}) &\leqslant \dim(F_1 + ... + F_n) + \dim(F_{n+1}) \text{ (d'après le cas } n = 2)\\ &\leqslant \dim(F_1) + ... + \dim(F_{n+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On sait que si la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe, on a $\dim(F_1 + \ldots + F_n) = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant,\ 2$ [$\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim F_1 + ... + \dim F_n$] $\Rightarrow$ la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe].
• Pour n=2 , d'après le n° 14, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \Rightarrow \dim(F_1 \cap F_2) = 0 \Rightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
• Soit $n \geqslant 2$. Soient F_1,...,F_{n+1} $n + 1$ sous-espaces de E tels que $\dim(F_1 + ... + F_{n+1}) = \dim(F_1) + ... + \dim(F_{n+1})$.
On sait que

$$\begin{aligned}\dim(F_1) + ... + \dim(F_{n+1}) &= \dim(F_1 + ... + F_{n+1})\\ &= \dim(F_1 + ... + F_n) + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1})\\ &\leqslant \dim(F_1) + ... + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1}),\end{aligned}$$

et donc $\dim((F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1}) \leqslant 0$ puis $\dim((F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1}) = 0$. Par suite $(F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1} = \{0\}$ et aussi $\dim(F_1) + ... + \dim(F_{n+1}) = \dim(F_1 + ... + F_n) + \dim(F_{n+1})$ et donc $\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim(F_1) + ... + \dim(F_n)$.
Mais alors, par hypothèse de récurrence, la somme $F_1 + ... + F_n$ est directe et si l'on rappelle que $(F_1 + ... + F_n) \cap F_{n+1} = \{0\}$, on a montré que la somme $F_1 + ... + F_{n+1}$ est directe.
Le résultat est démontré par récurrence.

n° 16 : Soit $n \geqslant 3$. Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, si H_1,..., H_k sont k hyperplans de E, alors $\dim(H_1 \cap ... \cap H_k) \geqslant n-k$.
• Pour $k = 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.
$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) \geqslant (n-1) + (n-1) - n = n-2$.
• Soit $k \in [\![2, n-3]\!]$. Supposons que la dimension d'une intersection de k hyperplans de E soit supérieure ou égale à $n-k$. Soient H_1,..., H_k, H_{k+1} $k+1$ hyperplans de E.

$$\dim(H_1 \cap ... \cap H_k \cap H_{k+1}) = \dim(H_1 \cap ... \cap H_k) + \dim(H_{k+1}) - \dim((H_1 \cap ... \cap H_k) + H_{k+1}) \geqslant (n-k) + (n-1) - n = n-(k+1),$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

Pour $k = n-1$, on obtient en particulier $\dim(H_1 \cap ... \cap H_{n-1}) \geqslant n-(n-1) = 1 > 0$ et donc $H_1 \cap ... \cap H_{n-1} \neq \{0\}$.

n° 17 : Si $m = n$, c'est immédiat.
Supposons $m < n$.

$$\begin{aligned} r &= \dim(\text{Vect}(x_1, ..., x_n)) = \dim\left(\text{Vect}(x_1, ..., x_m) + \text{Vect}(x_{m+1}, ...x_n)\right) \\ &\leqslant \dim(\text{Vect}(x_1, ..., x_m)) + \dim(\text{Vect}(x_{m+1}, ..., x_n)) \\ &\leqslant s + (n-m) \end{aligned}$$

et donc $s \geqslant r + m - n$. On a l'égalité si et seulement si chaque inégalité est une égalité, c'est à dire si et seulement si $\text{Vect}(x_1, ..., x_m) \cap \text{Vect}(x_{m+1}, ...x_n) = \{0\}$ (pour la première) et la famille $(x_{m+1}, ..., x_n)$ est libre (pour la deuxième).

n° 18 : $\text{Im}(f+g) = \{f(x) + g(x),\ x \in E\} \subset \{f(x) + g(x'),\ (x, x') \in E^2\} = \text{Im}f + \text{Im}g$. Donc

$$\text{rg}(f+g) \leqslant \dim(\text{Im}f + \text{Im}g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g$$

puis $\text{rg}f = \text{rg}((f+g) + (-g)) \leqslant \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg}g$ (car $\text{Im}(-g) = \{-g(x),\ x \in E\} = \{g(-x),\ x \in E\} = \{g(x'),\ x' \in E\} = \text{Im}g$) et donc $\text{rg}(f+g) \geqslant \text{rg}f - \text{rg}g$. De même , en échangeant les rôles de f et g, $\text{rg}(f+g) \geqslant \text{rg}g - \text{rg}f$ et finalement $\text{rg}(f+g) \geqslant |\text{rg}f - \text{rg}g|$.

$$\boxed{\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2,\ |\text{rg}f - \text{rg}g| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}f + \text{rg}g.}$$

n° 19 : $\text{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F)$ fournit $\text{rg}(g o f) \leqslant \text{rg}g$.
Soit $g' = g_{/f(E)}$. D'après le théorème du rang, on a

$$\text{rg}f = \dim(f(E)) = \dim\text{Ker}g' + \dim\text{Im}g' \geqslant \dim\text{Im}g') = \text{rg}(g \circ f)$$

et donc $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{Min}\{\text{rg}f, \text{rg}g\}$.

A partir du théorème du rang, on voit que l'inégalité $\text{rg}f + \text{rg}g - \dim F \leqslant \text{rg}(g \circ f)$ est équivalente à l'inégalité $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim\text{Ker}f + \dim\text{Ker}g$.
Soit $f' = f_{/\text{Ker}(g \circ f)}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) = \dim\text{Ker}f' + \dim\text{Im}f'$. Mais $\text{Ker}f' \subset \text{Ker}f$ puis $\text{Im}f' = \{f(x)/\ x \in E \text{ et } g(f(x)) = 0\} \subset \{y \in F/\ g(y) = 0\} = \text{Ker}g$ et finalement $\dim\text{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim\text{Ker}f + \dim\text{Ker}g$.

$$\boxed{\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G),\ \text{rg}f + \text{rg}g - \dim F \leqslant \text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{Min}\{\text{rg}f, \text{rg}g\}.}$$

n° 20 : Une condition nécessaire est bien sur $\dim F + \dim G = \dim E$ (et non pas $F \oplus G = E$).
Montrons que cette condition est suffisante. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$.
Soit F' un supplémentaire de F dans E (F' existe car E est de dimension finie).
Si $G = \{0\}$ (et donc $F = E$), $f = 0$ convient.
Si $G \neq \{0\}$, il existe un isomorphisme φ de F' sur G (car F' et G ont même dimension finie) puis il existe un unique endomorphisme de E vérifiant : $f_{/F} = 0_{/F}$ et $f_{/F'} = \varphi$.
Mais alors $\text{Im}f = f(F \oplus F') = f(F) + f(F') = \{0\} + G = G$ puis $F \subset \text{Ker}f$ et pour des raisons de dimension, $F = \text{Ker}f$.

n° 21 : 1) $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas injective (car $E \neq \{0\}$).
Si $f \neq 0$ et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $f \circ g = 0$ alors il existe un vecteur x de E tel que $g(x) \neq 0$ et $f(g(x)) = 0$. Par suite $\text{Ker}f \neq \{0\}$ et f n'est pas injective.
$\Rightarrow$/ Supposons f non injective et non nulle. Soient $F = \text{Ker}f$ et G un supplémentaire quelconque de F dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G.
Puisque $F = \text{Ker}f$, on a $f \circ p = 0$ et puisque f n'est pas nul, F est distinct de E et donc G n'est pas nul (E étant de dimension finie) ou encore p n'est pas nul. f est donc diviseur de zéro à gauche.

2) $\Leftarrow$/ Si $f = 0$, f n'est pas surjective.
Si f n'est pas nul et s'il existe un endomorphisme non nul g de E tel que $g \circ f = 0$ alors f ne peut être surjective car sinon $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contredisant $g \neq 0$.
$\Rightarrow$/ Supposons f non surjective et non nulle.
Soient $G = \mathrm{Im} f$ et F un supplémentaire quelconque de G dans E puis p la projection sur F parallèlement à G. F et G sont non nuls et distincts de E et donc p n'est pas nulle et vérifie $p \circ f = 0$. f est donc diviseur de zéro à droite.

n° 22 : **1ère solution.** Si $f = 0$, c'est immédiat . Sinon, soit p l'indice de nilpotence de f ($p \geqslant 2$).
Par définition de p, il existe un vecteur x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et $f^p(x_0) = 0$).
Montrons que la famille $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre. Dans le cas contraire, il existe a_0,..., a_{p-1} p scalaires non tous nuls tels que $a_0x_0 + ... + a_{p-1}f^{p-1}(x_0) = 0$.
Soit $k = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!]/\ a_i \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow f^{p-1}\left(\sum_{i=k}^{p-1} a_i f^i(x_0)\right) = 0\\ &\Rightarrow a_k f^{p-1}(x_0) = 0 \text{ (car pour } i \geqslant p,\ f^i = 0\\ &\Rightarrow a_k = 0 \text{ (car } f^{p-1}(x_0) \neq 0).\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de k et donc la famille $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre. Puisque le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace, on a montré que $p \leqslant n$ ou, ce qui revient au même, $f^n = 0$.

2ème solution. (pour les redoublants)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f. Le polynôme X^p est annulateur de f. Son polynôme minimal est un diviseur de X^p et donc égal à X^k pour un certain $k \in [\![1, p]\!]$. Par définition de l'indice de nilpotence, $k = p$ puis $\mu_f = X^p$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, μ_f divise χ_f qui est de degré n et en particulier $p \leqslant n$.

n° 23 : Cherchons une matrice A de format $(3, 2)$ et une matrice B de format $(2, 3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$.
Posons $E = \mathbb{R}^2$ et notons (i, j) la base canonique de E.
Posons $F = \mathbb{R}^3$ et notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de F.
Le problème posé matriciellement peut aussi s'énoncer en termes d'applications linéaires : trouvons $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$ telles que $f \circ g(e_1) = 8e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f \circ g(e_2) = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$ et $f \circ g(e_3) = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3$.
Remarquons tout d'abord que le problème posé n'a pas nécessairement de solution car par exemple $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{Min}\{f, g\} \leqslant \dim E = 2$ et si la matrice proposée est de rang 3 (c'est à dire inversible), le problème posé n'a pas de solution.
Ici, $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix} = 8 \times 9 - 2 \times 18 - 2 \times 18 = 0$ et la matrice proposée est de rang au plus 2 puis de rang 2 car ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires.
Une relation de dépendance des colonnes est $C_1 = 2C_2 - 2C_3$.
Un couple (f, g) solution devra vérifier $f \circ g(e_1) = 2f \circ g(e_2) - 2f \circ g(e_3)$.
Prenons n'importe quoi ou presque pour $g(e_2)$ et $g(e_3)$ mais ensuite prenons $g(e_1) = 2g(e_2) - 2g(e_3)$.
Par exemple, posons $g(e_2) = i$, $g(e_3) = j$ et $g(e_1) = 2i - 2j$ puis $f(i) = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$ et $f(j) = -2e_1 + 4e_2 + 5e_3$ ou encore soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2\\ 5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

Soient A et B deux matrices de formats respectifs $(3, 2)$ et $(2, 3)$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$. Calculons BA (il n'y a bien sûr pas unicité de A et B, mais l'énoncé suggère que le produit BA doit être indépendant de A et B).
Tout d'abord

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18\\ 18 & 45 & 36\\ -18 & 36 & 45\end{pmatrix} = 9AB.$$

De plus, $\mathrm{rg}(BA) \geqslant \mathrm{rg}(A(BA)B) = \mathrm{rg}((AB)^2) = \mathrm{rg}(9AB) = \mathrm{rg}(AB) = 2$ et donc $\mathrm{rg}(BA) = 2$ puis $BA \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.
De l'égalité $(AB)^2 = 9AB$, on tire après multiplication à gauche par B et à droite par A, $(BA)^3 = 9(BA)^2$ et, puisque BA est une matrice carrée inversible et donc simplifiable pour la multiplication des matrices, $BA = 9I_2$.

$$\boxed{BA = 9I_2.}$$

n° 24 : **1) a)** Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}.}$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E/\ y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k.}$$

b) Soit $x \in N$. Il existe un entier k tel que x est dans N_k ou encore tel que $f^k(x) = 0$. Mais alors $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ et $f(x)$ est dans N_k et donc dans N. Ainsi, N est stable par f.

Soit $y \in I$. Alors, pour tout naturel k, il existe $x_k \in E$ tel que $y = f^k(x_k)$. Mais alors, pour tout entier k, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x))$ est dans I_k, et donc $f(y)$ est dans I. I est stable par f.

c) Si $N_k = N_{k+1}$, on a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit $x \in N_{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Donc, $f^k(f(x)) = 0$ ou encore x est dans N_{k+1}. On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})].}$$

2) a) Notons tout d'abord que, pour tout entier naturel k, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$. Si de plus, on est en dimension finie, alors d'après le théorème du rang,

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}.$$

Donc $A = B$ (éventuellement $= \varnothing$).

La suite des noyaux itérés ne peut être strictement croissante pour l'inclusion car alors la suite des dimensions de ces noyaux serait une suite strictement croissante d'entiers naturels, vérifiant par une récurrence facile $\dim N_k \geqslant k$ pour tout naturel k, et en particulier $\dim N_{n+1} > \dim E$ ce qui est exclu.
Donc il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$. Soit p le plus petit de ces entiers k.
Par définition de p, N_k est strictement inclus dans N_{k+1} pour $k < p$, puis $N_p = N_{p+1}$ et d'après 1)c) pour tout entier naturel k supérieur ou égal à p on a $N_k = N_p$ (par récurrence sur $k \geqslant p$). Donc $A = \{p, p+1, p+2, ...\}$.
Enfin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < ... < \dim(N_p)$ et donc $\dim(N_p) \geqslant p$ ce qui impose $p \leqslant n$.

b) On a déjà $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Il reste à vérifier que $I_p \cap N_p = \{0\}$.
Soit x un élément de $I_p \cap N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Mais alors $f^{2p}(y) = 0$ et y est dans $N_{2p} = N_p$ (car $2p \geqslant p$) ou encore $x = f^p(y) = 0$.

$$\boxed{E = I_p \oplus N_p.}$$

c) Ici $N = N_p = \mathrm{Ker} f^p$ et $I = I_p = \mathrm{Im} f^p$.
Soit $f' = f_{/N}$. D'après 1)b), f' est un endomorphisme de N puis immédiatement $f'^p = 0$. Donc $f_{/N}$ est nilpotent.
Soit $f'' = f_{/I}$. f'' est d'après 1)b) un endomorphisme de I. Pour montrer que f'' est un automorphisme de I, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ker} f'' = \{0\}$. Mais $\mathrm{Ker} f'' \subset \mathrm{Ker} f \subset N$ et aussi $\mathrm{Ker} f'' \subset I$. Donc $\mathrm{Ker} f'' \subset N \cap I = \{0\}$. Donc $f_{/I} \in \mathscr{GL}(I)$.

3) Il faut bien sûr chercher les exemples en dimension infinie.

a) Soit f de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe sa dérivée P'. On vérifie aisément que $\forall k \div in\mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ et donc la suite des noyaux itérés est strictement croissante. La suite des I_k est par contre constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, A est vide et $B = \mathbb{N}$.

b) A un polynôme P, on associe le polynôme XP. Les N_k sont tous nuls et pour $k \in \mathbb{N}$ donné, I_k est constitué des polynômes de valuation supérieure ou égale à k ou encore $I_k = X^k\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, $A = \mathbb{N}$ et $B = \varnothing$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à Xn associe Xn+1 si n n'est pas une puissance de 2 et 0 si n est une puissance de 2 ($f(1) = X$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 0$, $f(X^3) = X^4$, $f(X^4) = 0$, ...)
Soit k un entier naturel.

$$f^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \neq 0 \text{ et } f^{2^k}(X^{2^k+1}) = f(X^{2^{k+1}}) = 0.$$

Donc, pour tout entier naturel k, N_{2^k-1} est strictement inclus dans N_k. A est vide.

Ensuite, $X^{2^{k+1}} \in I_{2^k-1}$ mais $X^{2^{k+1}} \notin I_{2^k}$. En effet, si $l \geqslant 2^{k+1}+1$, $f^{2^k}(X^l)$ est ou bien nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$ et si $l \leqslant 2^{k+1}$, $f^{2^k}(X^l) = 0$ car entre l et $2^k + l - 1$, il y a une puissance de 2 (il y a 2^k nombres entre l et $2^k + l - 1$, ensuite $2^k + l - 1 < 2^k + 2^{k+1} = 3 \times 2^k < 2^{k+2}$ et enfin l'écart entre deux puissances de 2 inférieures à 2^{k+1} vaut au maximum $2^{k+1} - 2^k = 2^k$) . Donc, I_{2^k} contient le polynôme nul ou des polynômes de degré strictement supérieur à 2^{k+1} et ne contient donc pas $X^{2^{k+1}}$. Finalement, pour tout entier naturel k, I_{2^k} est strictement inclus dans I_{2^k-1} et B est vide.

4) Pour k entier naturel donné, on note f_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim I_k = \dim \mathrm{Ker} f_k + \dim \mathrm{Im} f_k \text{ avec } \mathrm{Im} f_k = f(I_k) = I_{k+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \dim \mathrm{Ker} f_k$.
Or, pour tout entier naturel k, $\mathrm{Ker} f_{k+1} = \mathrm{Ker} f \cap I_{k+1} \subset \mathrm{Ker} f \cap I_k = \mathrm{Ker} f_k$ et donc $d_{k+1} - d_{k+2} = \dim \mathrm{Ker} f_{k+1} \leqslant \dim \mathrm{Ker} f_k = d_k - d_{k+1}$.
Finalement, pour tout entier naturel k, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ et la suite des images itérées décroît de moins en moins vite.

n^o 25 : On transforme légèrement l'énoncé.
Si x est un vecteur non nul tel que $(x, f(x))$ est liée alors il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Si $x = 0$, $f(x) = 0 = 0x$ et encore une fois il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Inversement, si pour tout x de E, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, alors la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc

$$[(\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ liée}) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda_x x)].$$

Notons de plus que dans le cas où $x \neq 0$, la famille (x) est une base de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ et en particulier, le nombre λ_x est uniquement défini.

Montrons maintenant que f est une homothétie c'est à dire montrons que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

Soient x_0 un vecteur non nul et fixé de E puis x un vecteur quelconque de E.

1er cas. Supposons la famille (x_0, x) libre. On a $f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}(x+x_0)$ mais aussi $f(x+x_0) = f(x)+f(x_0) = \lambda_x x+\lambda_{x_0} x_0$ et donc

$$(\lambda_{x+x_0} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0})x_0 = 0.$$

Puisque la famille (x_0, x) est libre, on obtient $\lambda_{x+x_0} - \lambda_x = \lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0} = 0$ et donc $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$. Ainsi, pour tout vecteur x tel que (x, x_0) libre, on a $f(x) = \lambda_{x_0} x$.

2ème cas. Supposons la famille (x_0, x) liée. Puisque x_0 est non nul, il existe un scalaire μ tel que $x = \mu x_0$. Mais alors

$$f(x) = \mu f(x_0) = \mu \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} x.$$

Finalement, il existe un scalaire $k = \lambda_{x_0}$ tel que pour tout vecteur x, $f(x) = kx$ et f est une homothétie. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ [(f \text{ homothétie}) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ liée})].}$$

n^o 26 : Remarques. 1) Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Ce centre, souvent noté Z, est un sous-groupe de $(G, *)$.
2) $(\mathscr{L}(E), \circ)$ est un magma associatif et unitaire mais non commutatif (pour $\dim E > 1$) mais $(\mathscr{L}(E), \circ)$ n'est pas un groupe. Par contre $(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de $(\mathscr{L}(E), \circ)$).

Soit f un endomorphisme (resp. automorphisme) de E commutant avec tous les endomorphismes (resp. les automorphismes) de E. f commute en particulier avec toutes les symétries.
Soit x un vecteur non nul de E et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire donné de $\mathrm{Vect}(x)$).

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x).$$

Par suite, $f(x)$ est invariant par s et appartient donc à $\mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme (resp. automorphisme) de E, f vérifie nécessairement $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ liée et d'après le n^o 25, f est nécessairement une homothétie.
Réciproquement , les homothéties de E commutent effectivement avec tout endomorphisme de E.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes de } E \text{ qui commutent avec tout endomorphismes de } E \text{ sont les homothéties.}}$$

Pour le centre de $\mathscr{GL}(E)$, il faut enlever l'application nulle qui est une homothétie mais qui n'est pas inversible.

n^o 27 : $\Rightarrow/$ Si $p + q$ est un projecteur alors l'égalité $(p + q)^2 = p + q$ founit $pq + qp = 0$. En composant par p à droite ou à gauche , on obtient $pqp + qp = 0 = pq + pqp$ et donc $pq = qp$.
Cette égalité jointe à l'égalité $pq + qp = 0$ fournit $pq = qp = 0$.
$\Leftarrow/$ Si $pq = qp = 0$, alors $(p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q$ et $p + q$ est un projecteur.

$$\boxed{\text{Pour tous projecteurs } p \text{ et } q,\ (p + q \text{ projecteur} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} q \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Im} p \subset \mathrm{Ker} q).}$$

Dorénavant, $p + q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $pq = qp = 0$.
On a $\mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q \subset \mathrm{Ker}(p + q)$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(p+q) \Rightarrow (p+q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x)+q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$ et donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

On a $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$. Inversement, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \Rightarrow \exists (x_1, x_2) \in E^2 /\ x = p(x_1) + q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x) = p^2(x_1) + pq(x_1) + qp(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p+q)$. Ainsi, $\mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et donc $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$. En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q \text{ et } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q.}$$

n° 28 : Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = Id_E$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.
Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$.

Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

$$\boxed{\text{En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.}}$$

n° 29 : $\Leftarrow$/ Si $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ alors

$$(p_1 + ... + p_n)^2 = p_1^2 + ... + p_n^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = p_1 + ... + p_n,$$

et $p_1 + ... + p_n$ est un projecteur.

$\Rightarrow$/ Supposons que $p = p_1 + ... + p_n$ soit un projecteur. Posons $F_i = \mathrm{Im}p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, puis $F = F_1 + ... + F_n$ et $G = \mathrm{Im}p$. On sait que la trace d'un projecteur est son rang. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\mathrm{rg}p = \mathrm{Tr}p = \mathrm{Tr}(p_1) + ... + \mathrm{Tr}(p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + ... + \mathrm{rg}(p_n),$$

et donc $\dim G = \dim F_1 + ... + \dim F_n \geqslant \dim F$. D'autre part, $G = \mathrm{Im}(p_1 + ... + p_n) \subset \mathrm{Im}p_1 + ... + \mathrm{Im}p_n = F_1 + ... + F_n = F$. On obtient donc $G = F$ et aussi $\dim(F_1 + ... + F_n) = \dim F_1 + ... + \dim F_n$. D'après le n° 15, $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_n).$$

Il reste à vérifier que pour $i \neq j$ et x dans E, $p_i(p_j(x)) = 0$ ou ce qui revient au même que pour $i \neq j$ et y dans $\mathrm{Im}(p_j)$, $p_i(y) = 0$.
Soit y dans $\mathrm{Im}(p_j)$ (et donc dans $\mathrm{Im}p$). Les égalités $y = p_j(y) = p(y)$ fournissent $\sum_{i \neq j} p_i(y) = 0$. La somme $\sum_i \mathrm{Im}(p_i)$ étant directe, on a donc $p_i(y) = 0$ pour chaque $i \neq j$ ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{p_1 + \ldots + p_n \text{ projecteur} \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0.}$$

n° 30 : **1)** D'après le n° 29, $\mathrm{Im}(p_1 + ... + p_n) = \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_n) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.
Chaque p_i est de rang au moins 1, mais si l'un des p_i est de rang supérieur ou égal à 2 alors $n = \dim E \geqslant \mathrm{rg}(p_1 + ... + p_n) = \mathrm{rg}(p_1) + ... + \mathrm{rg}(p_n) > n$ ce qui est impossible. Donc chaque p_i est de rang 1.

2) Les images des p_i (resp. q_i) sont des droites vectorielles. Pour chaque i, notons e_i (resp. e'_i) un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(p_i)$ (resp. $\mathrm{Im}(q_i)$). D'après 1), $E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Vect}(e_n)$ ou encore $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$) est une base de E. Soit f l'automorphisme de E défini par $f(e_i) = e'_i$ (f est un automorphisme car l'image par f d'une base de E est une base de E).
Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. $f \circ p_i \circ f^{-1}(e'_j) = f(p_i(e_j)) = f(\delta_{i,j} e_i) = \delta_{i,j} e'_i = q_i(e_j)$. Ainsi, les endomorphismes q_i et $f \circ p_i \circ f^{-1}$ coïncident sur une base de E et sont donc égaux.

n° 31 : Soit $q = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$.

$$q^2 = \frac{1}{n}\sum_{(g,h)\in G^2} h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais si g et h sont deux éléments de G et x est un vecteur quelconque de E, $p(g^{-1}(x))$ est dans F et donc par hypothèse $h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)$ est encore dans F (h^{-1} est dans G puisque G est un groupe). On en déduit que

$$h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1} = h\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1} = g\circ p\circ g^{-1}.$$

Mais alors

$$q^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2} g\circ p\circ g^{-1} = \frac{1}{n^2}\times n\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1} = q$$

et q est un projecteur.

Montrons que $F\subset \mathrm{Im}q$. Soit x un élément de F. Pour chaque $g\in G$, $g^{-1}(x)$ est encore dans F et donc $p(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ puis $g(p(g^{-1}(x))) = x$. Mais alors

$$q(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} x = x,$$

ou encore x est dans $\mathrm{Im}q$. On a montré que $F\subset \mathrm{Im}q$.

Montrons que $\mathrm{Im}q\subset F$. Soit x un élément de $\mathrm{Im}q$.

$$\begin{aligned}
p(x) = p(q(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x) \text{ (car } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ et donc } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\
&= q(x) = x,
\end{aligned}$$

et x est dans F. On a montré que $\mathrm{Im}q\subset F$ et finalement que $\mathrm{Im}q = F$.

$$\boxed{q \text{ est un projecteur d'image } F.}$$

n° 32 : Soit $A = \sum_{M\in G} M$. Alors $A^2 = \sum_{(M,N)\in G^2} MN$.

Soit $M\in G$ fixée. Considérons l'application φ de G dans G qui à un élément N de G associe MN. Puisque G est stable pour le produit, φ est bien une application. Plus précisément, φ est une permutation de G car l'application ψ de G dans lui-même qui à un élément N de G associe $M^{-1}N$ vérifie $\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi = Id_G$. On en déduit que

$$A^2 = \sum_{M\in G}\left(\sum_{N\in G} MN\right) = \sum_{M\in G} A = pA \text{ où } p = \mathrm{card}(G).$$

Finalement, la matrice $P = \dfrac{1}{p}A$ est idempotente car $\left(\dfrac{1}{p}A\right)^2 = \dfrac{1}{p^2}pA = \dfrac{1}{p}A$. Comme A est une matrice de projection, on sait que $\mathrm{rg}P = \mathrm{Tr}P = \sum_{M\in G}\mathrm{Tr}M = 0$ et donc $P = 0$ ou encore $\sum_{M\in G} M = 0$.

n° 33 : Par la même méthode qu'au n° 32, on voit que $f = \dfrac{1}{p}\sum_{g\in G} g$ est un projecteur et donc $\dfrac{1}{p}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}g = \mathrm{rg}f$.

Maintenant, si x est un élément de F alors pour tout g dans G, $g(x) = x$ et donc $f(x) = x$. Ainsi, un élément x de F est dans $\mathrm{Im}f$.

Inversement, soit x un élément de $\mathrm{Im}f$. Pour $g\in G$,

$$g(x) = g(f(x)) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} g\circ h(x) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} h(x) = f(x) = x.$$

(Comme au n° 32, l'application qui, pour $g\in G$ fixé, associe à un élément h de G l'élément $g\circ h$, est une permutation de G).

Ainsi, l'élément x de $\mathrm{Im}f$ est dans F. On a montré que $F = \mathrm{Im}f$. Puisque f est un projecteur, on en déduit que

$$\dim F = \mathrm{rg}f = \mathrm{Tr}f = \frac{1}{p}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}g.$$

n° 34 : Comme au n° 32, la matrice $A = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_k$ est idempotente et donc $\text{Tr}A = \text{rg}A$ d'après le n° 28. Par suite, $\text{Tr}(A_1) + ... + \text{Tr}A_p = p\text{rg}A$ est un entier divisible par p.

n° 35 : Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f.
Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(M) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}m_{i,j}$ où les $a_{i,j}$ sont n^2 scalaires indépendants de M et non tous nuls.

1er cas. Supposons qu'il existe deux indices distincts k et l tels que $a_{k,l} \neq 0$. Soit $M = I_n - \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} E_{k,l}$. M est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et M est dans H car $f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} - a_{k,l}\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} = 0$.

2ème cas. Si tous les $a_{k,l}$, $k \neq l$, sont nuls, H contient la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.