Planche n° 2. Algèbre linéaire II. Corrigé

n° 1 : Deux cas particuliers se traitent immédiatement.
Si $f = 0$, on prend $p = 0$ et $g = Id_E$ et si $f \in \mathscr{GL}(E)$, on prend $p = Id_E$ et $g = f$.
On se place dorénavant dans le cas où Kerf et Imf ne sont pas réduit à 0.
Soit F un supplémentaire de Kerf dans E et G un supplémentaire de Imf dans E.
On sait que la restriction f' de f à F réalise un isomorphisme de F sur Imf. D'autre part $\dim \text{Kerf} = \dim G < +\infty$ et donc Kerf et G sont isomorphes. Soit φ un isomorphisme de Kerf sur G.

On définit une unique application linéaire g en posant $g_{/\text{Kerf}} = \varphi$ et $g_{/F} = f'$.
g est un automorphisme de E. En effet,

$$g(E) = g(\text{Kerf} + F) = g(\text{Kerf}) + g(F) = \varphi(\text{Kerf}) + f'(F) = G + \text{Imf} = E,$$

(puisque φ et f' sont des isomorphismes) et donc g est surjective. Par suite g est bijective de E sur lui-même puisque $\dim E < +\infty$.

Soit p la projection sur F parallèlement à Kerf. On a

$$(g \circ p)_{/\text{Kerf}} = g \circ 0_{/\text{Kerf}} = 0_{/\text{Kerf}} = f_{/\text{Kerf}} \text{ et } (g \circ p)_{/F} = g \circ Id_{/F} = f' = f_{/F}.$$

Ainsi les endomorphismes $g \circ p$ et f coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $g \circ p = f$. Finalement, si on note $P(E)$ l'ensemble des projecteurs de E,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \exists g \in \mathscr{GL}(E),\ \exists p \in P(E)/\ f = g \circ p.}$$

n° 2 : (Ne pas confondre : $(\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*/\ f^p(x) = 0)$ et $(\exists p \in \mathbb{N}^*/\ \forall x \in E,\ f^p(x) = 0)$. Dans le deuxième cas, p est indépendant de x alors que dans le premier cas, p peut varier quand x varie).

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un entier non nul p_i tel que $f^{p_i}(e_i) = 0$. Soit $p = \text{Max}\{p_1, ..., p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour i dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$f^p(e_i) = f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{p-p_i}(0) = 0.$$

Ainsi l'endomorphisme f^p s'annule sur une base de E et on sait que $f^p = 0$.
On a donc trouvé un entier non nul p tel que $f^p = 0$ et par suite f est nilpotent.

n° 3 : **1)** A partir de $fg - gf = af + bg$ (1), on obtient après composition à droite par g, $fg - gfg = afg + bg$ ou encore $fg = g \circ \dfrac{1}{1-a}(fg + bId)$ (puisque $1 - a \neq 0$). On en déduit

$$\text{Im}(fg) \subset \text{Img}.$$

Mais alors en écrivant (1) sous la forme $f = \dfrac{1}{a}(fg - gf - bg)$ (puisque a n'est pas nul), on obtient

$$\text{Imf} \subset \text{Img}.$$

L'égalité Imf $\subset$ Img montre que tout vecteur de Imf est invariant par g et fournit donc l'égalité $gf = f$. On compose alors (1) à droite par f et en tenant compte de $gf = f$ et de $f^2 = f$, on obtient $f - f = af + bf$ et donc $(a + b)f = 0$ puis $b = -a$ puisque f n'est pas nul.
(1) s'écrit alors $fg - f = a(f - g)$. En composant à droite par g, on obtient : $a(fg - g) = 0$ et donc $fg = f$ puisque a n'est pas nul. (1) s'écrit maintenant $g - f = a(f - g)$ ou encore $(a + 1)(g - f) = 0$ et donc, puisque f et g sont distincts, $a = -1$.

2) (D'après 1), si a est distinct de 0 et de 1, nécessairement $a = -1$ et (1) s'écrit $fg - gf = -f + bg$).
Soit x un élément de Kerg. (1) fournit $-g(f(x)) = af(x)$ $(*)$ puis en prenant l'image par g, $(a + 1)g(f(x)) = 0$. Puisque a est distinct de -1, on obtient $g(f(x)) = 0$ et $(*)$ fournit $af(x) = 0$ puis $f(x) = 0$. Donc x est élément de Kerf. On a montré que Kerg $\subset$ Kerf.
On en déduit $\text{Im}(g - Id) \subset$ Kerf et donc $f(g - Id) = 0$ ou encore $fg = f$. (1) s'écrit $f - gf = af + bg$ et en composant à gauche par f, on obtient $f - fgf = af + bfg$. En tenant compte de $fg = f$, on obtient $(a + b)f = 0$ et donc $b = -a$.
(1) s'écrit alors $f - gf = a(f - g)$ et en composant à gauche par g, on obtient $0 = a(gf - g)$ et donc $gf = g$. (1) s'écrit enfin $f - g = a(f - g)$ et donc $a = 1$.

3) Si $a = 0$, (1) s'écrit $fg - gf = bg$. En composant à gauche ou à droite par g, on obtient $gfg - gf = bg$ et $fg - gfg = bg$. En additionnant ces deux égalités, on obtient $fg - gf = 2bg$. D'où, en tenant compte de (1), $bg = 2bg$ et puisque g n'est pas nul, $b = 0$. Par suite $fg - gf = 0$ ce qui est exclu par l'énoncé. Donc, on ne peut avoir $a = 0$. D'après 1) et 2), $(a, b) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$.

1er cas. $(a, b) = (-1, 1)$. C'est le 1) : $fg - gf = -f + g$. On a vu successivement que $gf = f$ puis que $fg = g$ fournissant $(g - Id)f = 0$ et $(f - Id)g = 0$ ou encore $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}(g - Id) = \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}f$ et donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}g$. Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de même image alors $gf = f$, $fg = g$ et donc $fg - gf = -f + g$. Le premier cas est donc le cas de deux projecteurs de même image .

2ème cas. $(a, b) = (1, -1)$. C'est le cas de deux projecteurs de même noyau.

n° 4 : 1) Si $N = \mathrm{Ker}f \neq \{0\}$, considérons g non nul tel que $\mathrm{Im}g \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Ker}f$.
Pour un tel g, $f \circ g = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.
Si $\mathrm{Im}f \neq F$, on choisit g nulle sur $\mathrm{Im}f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\mathrm{Im}f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g \circ f = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Im}f = F$.
Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F.

2) Soit $A = \{g \in \mathscr{L}(F, E)/\ f \circ g \circ f = 0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(F, E)$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathscr{L}(F, E)$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ qui à g associe $f \circ g \circ f$).
Soit J un supplémentaire de $I = \mathrm{Im}f$ dans F. Un élément g de $\mathscr{L}(F, E)$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J.

$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)_{/I} = 0 \text{ et } g_{/J} \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$

Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathscr{L}(I, N) \times \mathscr{L}(J, E)$ dans $\mathscr{L}(F, E)$ qui à un couple (g_1, g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g_{/I} = g_1$ et $g_{/J} = g_2$. G est linéaire et injective d'image A. Donc

$$\dim A = \dim\mathscr{L}(I, N) \times \dim\mathscr{L}(J, E) = \dim\mathscr{L}(I, N) + \dim\mathscr{L}(J, E) = r(p - r) + (n - r)p = pn - r^2.$$

n° 5 : 1) u est dans L(E) car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.
• Les polynômes constants sont dans $\mathrm{Ker}u$. Réciproquement , soit Pun élément de $\mathrm{Ker}u$ puis $Q = P - P(0)$.
Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = ...$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\mathrm{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$.
• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}u = (n + 1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X + 1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_n X^n + \ldots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$).
En résumé, $\mathrm{Im}u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim\mathrm{Im}u = \dim\mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\mathrm{Im}u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \mathrm{Im}u = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$

2) On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.
Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\mathrm{Ker}u = \mathbb{K}_0[X]$).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X + 1)^2 + b(X + 1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a - 1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend $P_2 = \dfrac{1}{2}(X^2 - X) = \dfrac{1}{2}X(X - 1)$.

Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

$$\begin{aligned}
u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\
&\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

On prend $P_3 = \dfrac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \dfrac{1}{6}X(X - 1)(X - 2)$.

Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \dfrac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k. \end{aligned}$$

Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

n° 6 : (C'est en fait un exercice sur les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce et vous pouvez généraliser cet exercice en passant au format n au lieu du format 4.)
Si on note C_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, la j-ème colonne de A alors $C_j = (\cos(i+j-2)a)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ puis pour j élément de $\{1,2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2\cos(i+j-1)a\cos a)_{1\leqslant i\leqslant 4} = 2\cos a C_{j+1}$$

et donc $C_3 = 2\cos a C_2 - C_1 \in \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$ et $C_4 = 2\cos a C_3 - C_2 \in \mathrm{Vect}(C_2,C_3) \subset \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$ et $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1,C_2) \leqslant 2$.
Enfin $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$.
• Si a n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$, ce déterminant n'est pas nul et donc les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 2$.
• Si a est dans $\pi\mathbb{Z}$, la première colonne n'est pas nulle et les autres colonnes lui sont colinéaires. Dans ce cas, $\mathrm{rg}A = 1$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

n° 7 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
N est nilpotente et donc $N^n = 0$. Par suite,

$$I = I - (-N)^n = (I+N)(I - N + ... + (-N)^{n-1}).$$

Ainsi A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $I - N + ... + (-N)^{n-1}$.

Calcul de N^p pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$N^2 = \left(\sum_{j=2}^{n} jE_{j-1,j}\right)^2 = \sum_{2\leqslant j,k\leqslant n} jkE_{j-1,j}E_{k-1,k} = \sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1} = \sum_{j=3}^{n} j(j-1)jE_{j-2,j}.$$

c'est-à-dire $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\times 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 3\times 4 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & (n-1)n \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, $N^3 = \left(\sum_{j=3}^{n}(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right)) = \sum_{j=4}^{n} j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.

Supposons que pour p donné dans $[\![1,n-1]\!]$, $N^p = \sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)...(j-p+1)E_{j-p,j}$.

Alors $N^{p+1} = \left(\sum_{j=p+1}^{n} j(j-1)...(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n} kE_{k-1,k}\right) = \sum_{j=p+2}^{n} j(j-1)...(j-p)E_{j-p-1,j}$. Ainsi

$$\boxed{A^{-1} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j,\ 1 \text{ si } i = j \text{ et } (-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k) \text{ sinon.}}$$

n° 8 : On note $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathrm{Tr}f = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}$ où $\alpha_{i,j}$ désigne la (i,j)-ème coordonnée de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$ dans la base $\mathscr{B}$.

Mais pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ donné,

$$AE_{i,j} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et de même,

$$E_{i,j}A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = a_{i,i} + a_{j,j}$ puis

$$\mathrm{Tr}f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,i} + a_{j,j}) = 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,i} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) = 2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Tr}A = 2n\mathrm{Tr}A.$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}f = 2n\mathrm{Tr}A.}$$

n° 9 : Si M est solution, nécessairement $a\mathrm{Tr}M + (\mathrm{Tr}M)(\mathrm{Tr}A) = \mathrm{Tr}B$ ou encore $(\mathrm{Tr}M)(a + \mathrm{Tr}A) = \mathrm{Tr}B$.

1er cas. Si $\mathrm{Tr}A \neq -a$ alors nécessairement $\mathrm{Tr}M = \dfrac{\mathrm{Tr}B}{a + \mathrm{Tr}A}$ puis $M = \dfrac{1}{a}\left(B - \dfrac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A\right)$.

Réciproquement, si $M = \dfrac{1}{a}\left(B - \dfrac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A\right)$ alors

$$aM + (\mathrm{Tr}M)A = B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A + \frac{1}{a}\left(\mathrm{Tr}B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}\mathrm{Tr}A\right)A = B.$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A \neq -a,\ \mathscr{S} = \left\{\frac{1}{a}\left(B - \frac{\mathrm{Tr}B}{a+\mathrm{Tr}A}A\right)\right\}.}$$

2ème cas. Si $\mathrm{Tr}A = -a$ et $\mathrm{Tr}B \neq 0$, il n'y a pas de solution .

3ème cas. Si $\mathrm{Tr}A = -a$ et $\mathrm{Tr}B = 0$, M est nécessairement de la forme $\dfrac{1}{a}B + \lambda A$ où λ est un réel quelconque.

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $M = \dfrac{1}{a}B + \lambda A$. Alors

$$aM + (\mathrm{Tr}M)A = B + a\lambda A + \left(\frac{1}{a}\mathrm{Tr}B + \lambda\mathrm{Tr}A\right)A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

et toute matrice de la forme $B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est solution.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}A = -a,\ \mathscr{S} = \varnothing \text{ si } \mathrm{Tr}B \neq 0 \text{ et } \mathscr{S} = \{B + \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ si } \mathrm{Tr}B = 0.}$$

n° 10 : Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice A. Posons encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$.

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$Cj = (i + j(i+1))_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = U + jV.$$

Donc $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n) \subset \mathrm{Vect}(U, V)$ et en particulier, $\mathrm{rg}A \leqslant 2$. Maintenant, si $n \geqslant 2$, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc, si $n \geqslant 2$, $\mathrm{rg}A = 2$ et si $n = 1$, $\mathrm{rg}A = 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \mathrm{rg}(i + j + ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 2 \text{ et si } n = 1,\ \mathrm{rg}(i + j + ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 1.}$$

n° 11 : **1)** $E = \text{Vect}(I, J)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la famille (I, J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc $\dim E = 2$.

2) Puisque $(E, +, .)$ est un espace vectoriel, $(E, +)$ est un groupe commutatif.
Ensuite, $I^2 = I \in E$, $IJ = JI = J \in E$ et $J^2 = (I + E_{1,2})^2 = I + 2E_{1,2} = I + 2(J - I) - I = 2J - I \in E$. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication est interne dans E et commutative. De plus, $I \in E$ et finalement E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Remarque. $M(x, y)M(x', y') = xx'I + (xy' + yx')J + yy'(2J - I) = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J$.

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
M(x, y) \text{ est inversible dans } E &\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2/ ; (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J = I \\
&\Leftrightarrow \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2/ ; \left\{ \begin{array}{l} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0 \end{array} \right. \text{ (car la famille } (I, J) \text{ est libre)} \quad (*).
\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système d'inconnue (x', y') est $x(x + 2y) + y^2 = (x + y)^2$.

- Si $x + y \neq 0$, le système $(*)$ admet une et une seule solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ est inversible dans E.
- Si $x + y = 0$, le système $(*)$ s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x(x' + y') = 1 \\ -x(x' + y') = 0 \end{array} \right.$ et n'a pas de solution. Dans ce cas, $M(x, y)$ n'est pas inversible dans E.

$$\boxed{M(x, y) \text{ est inversible dans } E \Leftrightarrow x + y \neq 0.}$$

Remarque. Puisque $I \in E$, $M(x, y)$ est inversible dans E si et seulement si $M(x, y)$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Posons $X = xI + yJ$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
a) D'après 1), $X^2 = (x^2 - y^2)I + (2xy + 2y^2)J$. Donc

$$\begin{aligned}
X^2 = I &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \text{ (car la famille } (I, J) \text{ est libre)} \\
&\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 1) \text{ ou } (y = -x et 0 = 1) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x = -1) \\
&\Leftrightarrow X = I \text{ ou } X = -I.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{I, -I\}.}$$

b)

$$X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ et } 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = 0) \text{ ou } (y = -x et 0 = 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x(I - J),\ x \in \mathbb{R}\}.}$$

Remarque. L'équation $X^2 = 0$, de degré 2, admet une infinité de solutions dans E ce qui montre une nouvelle fois que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

c)

$$\begin{aligned}
X^2 = X &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \text{ et } 2xy + 2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x + 2y - 1) = 0 \text{ et } x^2 - y^2 = x \\
&\Leftrightarrow (y = 0 \text{ et } x^2 = x) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } (x + y)(x - y) = x) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } X = I) \text{ ou } (2(x + y) = 1 \text{ et } x - y = 2x) \\
&\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = I.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0, I\}.}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M(x, y) = xI + y(I + N) = (x + y)I + yN$.
Puisque I et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned}
(M(x, y))^n &= ((x + y)I + yN) = (x + y)^n I + ny(x + y)^{n-1} N \text{ (car } N^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 2) \\
&= \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x, y))^n = \begin{pmatrix} (x + y)^n & ny(x + y)^{n-1} \\ 0 & (x + y)^n \end{pmatrix}.}$$

n° 12 : $\{0\}$ est un idéal bilatère de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.
Soit I un idéal non nul de de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$. Montrons que $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice A non nulle dans I. Pour tout quadruplet d'indices (i,j,k,l), I contient le produit

$$E_{i,j}AE_{k,l} = \sum_{1\leqslant u,v\leqslant n} a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}.$$

A est non nulle et on peut choisir j et k tels que $a_{j,k}$ soit non nul. I contient alors $a_{j,k}E_{i,l}\dfrac{1}{a_{j,k}}I_n = E_{i,l}$. Finalement I contient toutes les matrices élémentaires et donc encore toutes les sommes du type $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}I_nE_{i,j} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

$\boxed{\text{Les idéaux bilatères de l'anneau } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times) \text{ sont } \{0\} \text{ et } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$

n° 13 : On inverse A en l'interprétant comme une matrice de passage.
Soit $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e'_1,...,e_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow (e'_1,...,e'_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_1,...,e_n) \subset \text{Vect}(e'_1,...,e'_n) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ e_i \in \text{Vect}(e'_1,...,e'_n).$$

Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Soit $u = e_1 + ... + e_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e'_i = a_ie_i + u$ ce qui fournit $e_i = \dfrac{1}{a_i}(e'_i - u)$.

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)u$ et donc $\lambda u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i$ où $\lambda = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.

1er cas. Si $\lambda \neq 0$, on peut exprimer u en fonction des e'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et donc les e_i fonction des e'_i. Dans ce cas A est inversible. Plus précisément, $u = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i$ puis, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = \dfrac{1}{a_i}\left(e'_i - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}e'_j\right)$ et enfin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix} \text{ où } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

2ème cas. Si $\lambda = 0$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}e'_i = 0$ ce qui montre que la famille $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée et donc que A n'est pas inversible.

n° 14 : Par hypothèse, $a_{i,j} = 0$ pour $j \leqslant i + r - 1$ et $bi,j = 0$ pour $j \leqslant i + s - 1$.
Soient i et j deux indices tels que $j \leqslant i + r + s - 1$. Le coefficient ligne i, colonne j, de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.
Dans cette somme, si $k \leqslant i + r - 1$, $a_{i,k} = 0$. Sinon $k \geqslant i + r$ et donc $j \leqslant i + r + s - 1 \leqslant k + s - 1$ et dans ce cas $b_{k,j} = 0$.
Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de AB est bien nul si $j \leqslant i + r + s - 1$.

n° 15 : Notons A la matrice de l'énoncé. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule du binôme de Newton, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coïncide donc sur la base $\mathscr{B}$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)$ et f est donc cet endomorphisme.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque l'application qui à un polynôme P associe $P(X-1)$. Par suite, A est inversible d'inverse la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
Le coefficient ligne i, colonne j, de A^{-1} vaut donc 0 si $i > j$ et $(-1)^{i+j}\dbinom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

n° 16 : Calculons $A\overline{A}$. Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\overline{A}$ vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(j-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, ce coefficient vaut n.
• Si $j \neq k$, puisque $j - k$ est strictement compris entre $-n$ et n et que $j - k$ n'est pas nul, ω^{j-k} est différent de 1. Le coefficient ligne j, colonne k, de $A\overline{A}$ est donc égal à $\dfrac{1 - \left(\omega^{j-k}\right)^n}{1 - \omega^{j-k}} = \dfrac{1-1}{1 - \omega^{j-k}} = 0$.

Finalement, $A\overline{A} = nI_n$. Ainsi, A est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$.

n° 17 : On a toujours $A^t(\text{com}A) = (\det A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A$ n'est pas nul, on en déduit $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
• Si $\det A$ est nul, on a $A^t(\text{com}A) = 0$ et donc ${}^t\text{com}A$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\text{com}A$ et donc $\det(\text{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_(\mathbb{R}),\ \det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

n° 18 : • Si A est de rang n, c'est-à-dire inversible, l'égalité $(\text{com}A) \times \dfrac{1}{\det A}{}^tA = I_n$ montre que $\text{com}A$ est inversible et donc de rang n.

Dans ce qui suit, le lien entre le rang d'une matrice et la nullité des différents mineurs est hors programme. On suppose maintenant $\text{rg}(A) \leqslant n - 1$.

• Si $\text{rg}A \leqslant n - 2$. Montrons que tous les mineurs de format $n - 1$ extraits de A sont nuls.
Soient $j_1,\ldots, j_{n-1}$, $n-1$ numéros de colonnes deux à deux distincts puis $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_{j_1},\ldots,$ $C_{j_{n-1}}$. Puisque A est de rang au plus $n - 2$, la famille des colonnes de A' est liée et donc A' est de rang au plus $n - 2$. Il en est de même de la matrice ${}^tA' \in -,(\mathbb{K})$ et donc toute matrice A'' obtenue en supprimant l'une des colonnes de A' est carrée, de format $n - 1$, non inversible. Son déterminant est donc nul.
Ainsi, tout déterminant obtenu en supprimant une ligne et une colonne de $\det(A)$ est nul ou encore tous les mineurs de format $n - 1$ extraits de A sont nuls. Finalement, si $\text{rg}A \leqslant n - 2$, $\text{com}A = 0$.

• Il reste à étudier le cas où $\text{rg}A = n - 1$ et donc $\dim\text{Ker}A = 1$.
L'égalité $\det A = 0$ impose $A^t(\text{com}A) = 0$. Mais alors $\text{Im}({}^t(\text{com}A)) \subset \text{Ker}A$ et en particulier $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}({}^t(\text{com}A)) \leqslant \dim(\text{Ker}A) = 1$. Ainsi, si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0, 1\}$.
Montrons que l'un au moins des mineurs de format $n - 1$ extraits de A est non nul ce qui montrera que $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.
Puisque $\text{rg}A = n-1$, il existe $n-1$ colonnes $C_{j_1},\ldots, C_{j_{n-1}}$ de A constituant une famille libre. La matrice $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ constituée par ces colonnes est de rang $n - 1$. Il en est de même de sa transposée. Mais alors, il existe $n - 1$ colonnes de ${}^tA'$ linéairement indépendantes. La matrice A'' constituée de ces $n - 1$ colonnes est carrée de format $n - 1$ et de rang $n - 1$. A'' est donc inversible et il en est de même de ${}^tA''$. Le déterminant de ${}^tA''$ est un mineur de format $n - 1$ extrait de A et non nul.

En résumé,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}(\text{com}A) = \left\{\begin{array}{l} n \text{ si } \text{rg}(A) = n \\ 1 \text{ si } \text{rg}(A) = n-1 \\ 0 \text{ si } \text{rg}(A) \leqslant n-2 \end{array}\right. .}$$

n° 19 : Si $\text{rg}M \leqslant n - 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = M^t(\text{com}M) = (\det M)I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} M^tM = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tMX\right\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0. \end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible.
Dans le deuxième cas, d'après le n° 17, on doit avoir $\det M = (\det M)^{n-1}$ et donc, puisque $\det M \neq 0$, $\det M \in \{-1, 1\}$ (et même $\det M = 1$ si n est impair) car $\det M$ est réel.

• Si $\det M = -1$, on doit avoir $M^tM = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice M^tM vaut $m_{1,1}^2 + ... + m_{1,n}^2 \neq -1$.
• Il reste le cas où $\det M = 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $M^tM = I_n$ c'est-à-dire M est orthogonale positive.
Réciproquement, si M est orthogonale positive, ${}^tM = M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}{}^t(\text{com}M) = {}^t\text{com}M$ et donc $M = \text{com}M$.

Finalement ,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

n° 20 : Montrons que KerA est réduit à $\{0\}$. Dans le cas contraire, on dispose d'un vecteur colonne non nul X_0 tel que $AX_0 = 0$. Posons $X_0 = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

On prend alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$. De plus,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right) |x_{i_0}|,$$

et puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient après simplification $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ ce qui contredit les hypothèses.
Donc $\text{Ker}A = \{0\}$ et A est inversible.

n° 21 : Non, car $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$.

n° 22 : Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$ où les $\alpha_{i,j}$ sont indépendants de A (les $\alpha_{i,j}$ sont les $f(E_{i,j})$).
Soient i et j deux entiers distincts pris dans $[\![1, n]\!]$.

$$\alpha_{i,i} = f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}) = \alpha_{j,j},$$

et

$$\alpha_{i,j} = f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$

Finalement en notant α la valeur commune des $\alpha_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pour toute matrice A on a $f(A) = \alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \alpha\text{Tr}A$ où α est indépendant de A. (Réciproquement, les $f = \alpha\text{Tr}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont des formes linéaires vérifiant $\forall(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$.)

n° 23 : Puisque $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \text{ et } \sin\theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matrice A_n s'écrit alors $A_n = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ et donc

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(\frac{n}{2}\times o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp(o(1))\underset{n\to+\infty}{\to}1.$$

Ensuite, en notant ε le signe de a, $\theta_n=\varepsilon\,\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et on en déduit que

$$n\theta_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\sin(\theta_n)=n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}\underset{n\to+\infty}{\to}a.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n=\begin{pmatrix}\cos(a)&-\sin(a)\\\sin(a)&\cos(a)\end{pmatrix}.}$$

n° 24 : Soient i et j deux indices pris dans $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j})=E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l},$$

et en remplissant coefficient à coefficient, on trouve la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix}{}^tA&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&{}^tA\end{pmatrix}$.

n° 25 : On note r le rang de A. Si $r=0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A=PJ_rQ$ où $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$. Soient $P'=\begin{pmatrix}P&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&P\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q'=\begin{pmatrix}P&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&Q\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Puisque $\det(P')=(\det(P))^p\neq0$ et $\det(Q')=(\det(Q))^p\neq0$, les matrices P' et Q' sont inversibles. De plus, un calcul par blocs montre que

$$B=\begin{pmatrix}PJ_rQ&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&PJ_rQ\end{pmatrix}=P'J_r'Q'\text{ où }J_r'=\begin{pmatrix}J_r&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&J_r\end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J_r' et a donc même rang que J_r'. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J_r' a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\mathrm{rg}B=p\mathrm{rg}A.}$$

n° 26 : Soit r le rang de H. Il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $H=PJ_rQ$ où $J_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$. L'égalité $HAH=\lambda_AH$ s'écrit après simplifications $J_rQAPJ_r=\lambda_AJ_r$. Maintenant , quand A décrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $B=QAP$ décrit également $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple, l'application qui à A associe QAP est une permutation de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de réciproque l'application qui à A associe $Q^{-1}AP^{-1}$).

L'énoncé s'écrit maintenant de manière plus simple : montrons que $(\forall B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists\lambda_B\in\mathbb{K}/\ J_rBJ_r=\lambda_BJ_r)\Rightarrow r\leqslant1$.

Un calcul par blocs fournit en posant $B=\begin{pmatrix}B_1&B_3\\B_2&B_4\end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_3\\B_2&B_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&0\\B_2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Mais si $r\geqslant2$, il existe des matrices carrées B_1 de format r qui ne sont pas des matrices scalaires et donc telles que B_1 n'est pas colinéaire à I_r. Donc $r\leqslant1$.

n° 27 : (1) $\Rightarrow$ (2).
$M^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M \Rightarrow \mathrm{rg}M \leqslant \dim(\mathrm{Ker}M) = 3 - \mathrm{rg}M$ et donc $\mathrm{rg}M \leqslant 1$.
Si $\mathrm{rg}M = 0$ alors $\mathrm{Tr}M = 0$. On suppose maintenant que $\mathrm{rg}M = 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}M) = 2$.
Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}M$ alors il existe un vecteur e_3 (non nul) tel que $Me_3 = e_1$.
On complète la famille libre (e_1) de $\mathrm{Im}M \subset \mathrm{Ker}M$ en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}M$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow M(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en particulier $\mathrm{Tr}M = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1).
Si $\mathrm{rg}M = 0$, $M^2 = 0$.
Si $\mathrm{rg}M = 1$, on peut se rappeler de l'écriture générale d'une matrice de rang 1 : il existe trois réels u_1, u_2 et u_3 non tous nuls et trois réels v_1, v_2 et v_3 non tous nuls tels que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ ou encore il existe deux vecteurs colonnes, tous deux non nuls U et V tels que $M = U{}^tV$. L'égalité $\mathrm{Tr}M = 0$ fournit $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ou encore ${}^tUV = 0$. Mais alors

$$M^2 = U{}^tVU{}^tV = U{}^t({}^tUV){}^tV = 0$$

Cet exercice admet des solutions bien plus brèves avec des connaissances sur la réduction .

n° 28 : Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - ... + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}(A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0} A^{p-k-1}(AB - BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k \sum_{k=0} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Donc $2010 \times \mathrm{Tr}(A^{2010}) = \mathrm{Tr}(2010\ A^{2010}) = \mathrm{Tr}(A^{2010}B) - \mathrm{Tr}(BA^{2010}) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A^{2010}) = 0$.

n° 29 : Si $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables alors nécessairement $\mathrm{Tr}(M(a)) = \mathrm{Tr}(N(a))$. Or, pour tout scalaire a, $\mathrm{Tr}(M(a)) = 4 - 3a = \mathrm{Tr}(N(a))$. La trace ne fournit aucun renseignement.
On doit aussi avoir $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Or, $\det(N(a)) = (1 - a)^2(2 - a)$ et

$$\begin{aligned} \det(M(a)) &= (4 - a)(a^2 - 1 - 2) + 6(1 - a + 1) + 2(2 - 1 - a) = (4 - a)(a^2 - 3) + 14 - 8a = -a^3 + 4a^2 - 5a + 2 \\ &= (a - 1)^2(2 - a) = \det(N(a)). \end{aligned}$$

Le déterminant ne fournit aucun renseignement.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (i, j, k)$ de $\mathbb{K}^3$.
Le problème posé équivaut à l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2 + e_1$ et $f(e_3) = (2 - a)e_3$. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{K}^3$.

- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$. On peut prendre $e_1 = (1, -2, 1)$.
- $f((x, y, z)) = (1 - a)(x, y, z) + (1, -2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ -6x - 2y + 2z = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x - 2 \end{cases}$. On peut prendre $e_2 = (0, -1, -2)$.
- $f((x, y, z)) = (2 - a)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$. On peut prendre $e_3 = (1, -2, 0)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\det P = -4 + 4 + 1 = 1 \neq 0$ et donc la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0} f = M(a)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = N(a)$, les matrices $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables.

n° 30 : Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe P élément de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$ (bien plus manipulable que $B = P^{-1}AP$).
Posons $P = Q + iR$ où Q et R sont des matrices réelles. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $QB = AQ$ et $RB = AR$ mais l'exercice n° 30 n'en est pas pour autant achevé car Q ou R n'ont aucune raison d'être inversibles.
On a $QB = AQ$ et $RB = AR$ et donc plus généralement pour tout réel x, $(Q + xR)B = A(Q + xR)$.
Maintenant, $\det(Q + xR)$ est un polynôme à coefficients réels en x mais n'est pas le polynôme nul car sa valeur en i (tel que $i^2 = -1$) est $\det P$ qui est non nul. Donc il n'existe qu'un nombre fini de réels x, éventuellement nul, tels que $\det(Q + xR) = 0$. En particulier, il existe au moins un réel x_0 tel que la matrice $P_0 = Q + x_0R$ soit inversible. P_0 est une matrice réelle inversible telle que $P_0A = BP_0$ et A et B sont bien semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

n° 31 : **1)** Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B. Puisque A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,
- si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $A^kB^{p+q-1-k} = 0$
- si $k \leqslant p-1$ alors $p+q-1-k \geqslant q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.

Finalement, $(A+B)^{p+q-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^kB^{p+q-1-k} = 0$ et $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.

Les sommes définissant $\exp A$, $\exp B$ et $\exp(A+B)$ sont finies car A, B et $A+B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A\hat{\imath}B^j \\ &\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}B^j\right) \text{ (toutes les sommes sont finies)} \\ &= \exp A \times \exp B.\end{aligned}$$

2) Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A. Donc $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I_n$.
$\exp A$ est inversible à gauche et donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

3) Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$