

# Planche n° 3. Dualité

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\*I) :** 1) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{C}_n[X]$ . Pour  $a \in \mathbb{C}$ , on définit l'application  $\varphi_a$  par :  $\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$ . Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{C}, \varphi_a \in E^*$ .

2) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $n + 1$  nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille  $(\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$  est une base de  $E^*$  et déterminer sa préduale.

3) Montrer qu'il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$  puis donner la valeur des  $\lambda_i$  sous la forme d'une intégrale.

**n° 2 (\*\*)** : Sur  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on pose pour tout  $P \in E, \varphi_1(P) = P(0)$  et  $\varphi_2(P) = P(1)$  puis  $\psi_1(P) = P'(0)$  et  $\psi_2(P) = P'(1)$ . Montrer que  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  est une base de  $E^*$  et trouver la base dont elle est la duale.

**n° 3 (\*\*)** : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires sur  $E$ . On suppose que pour tout  $x$  de  $E$ , on a  $\varphi(x)\psi(x) = 0$ . Montrer que  $\varphi = 0$  ou  $\psi = 0$ .

**n° 4 (\*\*\*) :** 1) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  puis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  et  $\varphi$   $n + 1$  formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que :  $\left( \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi \right)$ .

2) Signification du résultat précédent : dans  $\mathbb{R}^3$ , équation d'un plan  $P$  contenant  $D : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$  et le vecteur  $u = (1, 1, 1)$  ?

**n° 5 (\*\*\*) :** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  puis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$   $n$  formes linéaires sur un  $\mathbb{K}$ -espace  $E$  de dimension  $n$ . Montrer que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est liée si et seulement si il existe un vecteur  $x$  non nul tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0$ .

**n° 6 (\*\*)** : Rang du système de formes linéaires sur  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 &= x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 &= x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 &= x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{aligned} \quad ?$$