

# Planche n° 4. Déterminants

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\*)** : Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice carrée et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$ . Calculer  $\det(B)$  en fonction de  $\det(A)$ .

**n° 2 (\*\*\*)** : On définit par blocs une matrice  $A$  par  $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices carrées de formats respectifs  $n$ ,  $p$  et  $q$  avec  $p + q = n$ . Montrer que  $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$ .

**n° 3 (\*\*\*)** : (Déterminants de VANDERMONDE).

Soient  $x_0, \dots, x_{n-1}$   $n$  nombres complexes. Calculer  $\text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

**n° 4 (\*\*\*\*)** : (Déterminant de Cauchy). Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$   $2n$  nombres complexes tels que toutes les sommes  $a_i + b_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , soient non nulles. Calculer  $C_n = \det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ . Cas particulier :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i = b_i = i$  (déterminant de HILBERT).

**n° 5 (\*\*)** : Résoudre le système  $MX = U$  où  $M = (j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $U = (\delta_{i,1})_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $X$  est un vecteur colonne inconnu.

**n° 6 (\*\*)** : Calculer  $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $a_1, \dots, a_n$  sont  $n$  réels donnés ( $n \geq 2$ ).

**n° 7 (\*\*)** : Calculer  $\det(a_i + b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  sont  $2n$  complexes donnés.

**n° 8 (\*\*)** : Calculer  $\det((a + i + j)^2)_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $a$  est un complexe donné.

**n° 9 (\*\*\*\*)** : Soient  $x_1, \dots, x_n$   $n$  entiers naturels tels que  $x_1 < \dots < x_n$ . A l'aide du calcul de  $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ , montrer que  $\prod_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_j - x_i}{j - i}$  est un entier naturel.

**n° 10 (\*\*\*\*)** : (Déterminants circulants).

Soient  $a_0, \dots, a_{n-1}$   $n$  nombres complexes. Calculer  $\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = \det A$ . Pour cela, on calculera

d'abord  $A\Omega$  où  $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j,k \leq n}$  avec  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .

**n° 11 (\*\*\*)** : 1) Soient  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $n^2$  fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $d = \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Montrer que  $d$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $d'$ .

2) Application : calculer  $d_n(x) = \det \begin{pmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ .

**n° 12 (\*\*\*)** : Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées réelles de format  $n$ . Montrer que le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$  de format  $2n$  est un réel positif.

**n° 13 (\*\*\*)** : Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre matrices carrées de format  $n$ . Montrer que si  $C$  et  $D$  commutent et si  $D$  est inversible alors  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ . Montrer que le résultat persiste si  $D$  n'est pas inversible.

**n° 14 (\*\*\*) :** Soit  $A$  une matrice carrée complexe de format  $n$  ( $n \geq 2$ ) telle que pour tout élément  $M$  de  $M_n(\mathbb{C})$ , on ait  $\det(A + M) = \det A + \det M$ . Montrer que  $A = 0$ .

**n° 15 (\*\*I) :** Soient  $a_0, \dots, a_{n-1}$   $n$  nombres complexes et  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ . Calculer  $\det(A - xI_n)$ .

**n° 16 (\*\*) :** Calculer les déterminants suivants :

1)  $\det A$  où  $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$  est telle que  $a_{i,i} = a$  et  $a_{i,2n+1-i} = b$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon.

2)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$  3)  $\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$  ( $n \geq 2$ )

4) (I)  $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$  ( $n \geq 2$ ).