Planche n° 5. Réduction. Corrigé

n° 1 : 1ère solution. $A = 2J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 3J$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2J - I)^n = (-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3}((6-1)^n - (-1)^n) J \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Soit de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &((-1)^n I + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n) J) \times ((-1)^{-n} I + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n}) J) \\ &\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1) J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1) J^2 \\ &\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1) J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1) J = I, \end{aligned}$$

et donc

$$A^{-n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

2ème solution. Puisque $\mathrm{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = -(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y + z = 0$ et donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i = \dfrac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \dfrac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \dfrac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{array} \right.$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En prenant les valeurs des membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1 , on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n) \end{array}\right. .$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I\right) \\ &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\left. + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

n° 2 : Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.
A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

n° 3 : **1)** $\chi_A = -(2+X)((3-X)(-1-X)+4) = -(X+2)(X^2-2X+1) = -(X+2)(X-1)^2$.
A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(A-I) = 1$ ce qui n'est pas . Donc A n'est pas diagonalisable. De plus, $E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ est le plan d'équation $4x+4y-z=0$.

3) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A+2I) \oplus \mathrm{Ker}(A-I)^2.$$

De plus, chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(A+2I)$ et $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\mathrm{Ker}(A-I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ et en choisissant une base de $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ dont l ?un des deux vecteurs est dans $\mathrm{Ker}(A-I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D + N$ où $D = \mathrm{diag}(-2,1,1)$ et $N = E_{2,3}$. On a $ND = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N = \mathrm{diag}((-2)^n,1,1) + n\,\mathrm{diag}((-2)^{n-1},1,1)E_{2,3} = \mathrm{diag}((-2)^n,1,1) + nE_{2,3} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}.}$$

n° 4 : Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na - 2na = 0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linéarité de f étant claire, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P) = \lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX+\lambda}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+\lambda}{X-1} - \frac{-2n+\lambda}{X+1}\right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\dfrac{P'}{P}$ (à savoir si $P = K(X-z_1)^{\alpha_1}\dots(X-z_k)^{\alpha_k}$ avec $K \neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{X-z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines dans $\mathbb{C}$ que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\dfrac{1}{2}(2n+\lambda+2n-\lambda) = 2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } P_k = (X-1)^k(X+1)^{2n-k} \text{ avec } k \in [\![0, 2n]\!].$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{k}{X-1} + \frac{2n-k}{X+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+(2k-2n)}{X-1} + \frac{2n-(2k-2n)}{X+1}\right).$$

Donc, pour chaque $k \in [\![0, 2n]\!]$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = 2(k-n)$.
Ainsi, f admet $2n+1$ valeurs propres, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X] = 2n+1)$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\text{Vect}(P_k)$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

n° 5 : Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$AP - (X^4 - X)P = (X-1)P = aX^4 + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (d-c)X - d = a(X^4 - X) + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d.$

et donc $AP = (X^4 - X)(P+a) + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d$ et donc $f(P) = (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d$.
Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X+1)(-(X+1)^3+1) = X(X+1)(X^2+3X+3).\end{aligned}$$

A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1+j$ et $-1+j^2$. χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.

- Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow b - a = c - b = a + d - c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ et $d = 0$. $\text{Ker}f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$.
- Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow b = c = a + d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ et $d = -a$. $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}(X^3 - 1)$.
- $\text{rg}(f) = 3$ et immédiatement $\text{Im}f = \text{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut continuer :
$P \in \text{Ker}(f + (1-j)\text{Id}) \Leftrightarrow b - ja = c - jb = a + d - jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja,\ c = j^2a$ et $d = 0$.
Donc $\text{Ker}(f + (1-j)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + jX^2 + j^2X)$ et en conjuguant $\text{Ker}(f + (1-j^2)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + j^2X^2 + jX)$.

Remarque. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de Lagrange $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + jX^2 + j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3 + j^2X^2 + jX = X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de Lagrange associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

n° 6 : Si $p = q$, le résultat est connu : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Supposons par exemple $p < q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique. Un calcul par blocs donne $B'A' = BA$ et $A'B' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p} \end{pmatrix}$. Donc $\chi_{BA} = (-X)^{q-p}\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $(-X)^p\chi_{BA} = (-X)^q\chi_{AB}$ ce qui vrai dans tous les cas.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}),\ (-X)^p\chi_{BA} = (-X)^q\chi_{AB}.}$$

n° 7 : Si u est inversible,

$$\det(u+v) = \det u \Leftrightarrow \det u \times \det(\mathrm{Id} + u^{-1}v) = \det u \Leftrightarrow \det(\mathrm{Id} + u^{-1}v) = 1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv = vu \Rightarrow u^{-1}uvu^{-1} = u^{-1}vuu^{-1} \Rightarrow vu^{-1} = u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w = u^{-1}v$ l'est également car $(u^{-1}v)^p = u^{-p}v^p$).

Il reste donc à calculer $\det(\mathrm{Id} + w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(\mathrm{Id} + w) = \chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w = (-X)^n$ puis

$$\det(\mathrm{Id} + w) = \chi_w(-1) = (-(-1))^n = 1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u + x\mathrm{Id}$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v. Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u + x\mathrm{Id} + v) = \det(u + x\mathrm{Id})$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u+v) = \det u$.

n° 8 : • Si A est nilpotente, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans $\mathbb{C}$ de A^k. Par suite, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

• Réciproquement , supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est $(-X)^n$ et donc que A est nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Soient λ_1,..., λ_n les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $S_k = \lambda_1^k + ... + \lambda_n^k$. Il s'agit de montrer que : $(\forall k \in [\![1,n]\!],\ S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1,n]\!],\ \lambda_j = 0)$.

1ère solution. Les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k) = 0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soient μ_1,..., μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A ($1 \leqslant p \leqslant n$). On prend $P = X\prod_{j\neq i}(X - \mu_j)$ si $p \geqslant 2$ et $P = X$ si $p = 1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\lambda_i) = 0$ fournit $\lambda_i = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

2ème solution. Pour ceux qui savent que les sommes de Newton S_k sont liées aux fonctions élémentaires en les λ_i σ_1,..., σ_n par les formules de Newton :

$$\forall k \leqslant n,\ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Par suite, si tous les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls alors immédiatement tous les σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls et donc les λ_i sont nuls car tous racines de l'équation $x^n = 0$.

n° 9 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f^kg - fg^k &= f^kg - f^{k-1}gf + f^{k-1}gf - f^{k-2}gf^2 + f^{k-2}gf^2 - \ldots - fgf^{k-1} + fgf^{k-1} - gf^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(f^{k-i}gf^i - f^{k-i-1}gf^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}(fg - gf)f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}ff^i \\
&= kf^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N},\ f^kg - gf^k = kf^k \quad (*).}$$

1ère solution. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ h & \mapsto & hg - gh \end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = kf^k$. Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k. Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$. Donc, f est nilpotent.

2ème solution. Les égalités $(*)$ peuvent s'écrire $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, $(**)$, quand P est un polynôme de la forme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, les égalités $(**)$ sont vraies pour tout polynôme P.
En particulier, l'égalité $(**)$ est vraie quand P est Q_f le polynôme minimal de f et donc

$$fQ_f'(f) = Q_f(f)g - gQ_f(f) = 0.$$

Le polynôme XQ_f' est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme Q_f divise le polynôme XQ_f'. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le degré de Q_f, les polynômes pQ_f ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $pQ_f = XQ_f'$ ou encore que

$$\frac{Q_f'}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de $\dfrac{Q_f'}{Q_f}$, on en déduit que $Q_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

n° 10 : 1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ. Le sous-espace propre E_λ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace E_λ. u' et v' sont des endomorphismes de E_λ. De nouveau, E_λ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0. Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v.

2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} uv - vu = \alpha u + \mu v &\Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v. \end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f. Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker} f$ n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (n° 9) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).
Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g + Id) \circ f = f \circ g$ et donc $g + Id = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g + Id$ ont même polynôme caractéristique ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda + 1$ est encore valeur propre de g. Mais alors $\lambda + 2$, $\lambda + 3$... sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc $\mathrm{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Maintenant, si x est un vecteur de $\mathrm{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans $\mathrm{Ker} f$. Donc g laisse $\mathrm{Ker} f$ stable et sa restriction à $\mathrm{Ker} f$ est un endomorphisme de $\mathrm{Ker} f$ qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g.
Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \dfrac{1}{\alpha} g$ et de $u = \dfrac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v.

n° 11 : 1) • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.
• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Donc AB est dans E.
• Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.

Finalement

$$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{R}).}$$

2) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.
A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.
A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :

1er cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1, 1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.
2ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (-1, -1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.

3ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (1, -1)$ alors A est semblable à $\mathrm{diag}(1, -1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.

4ème cas. Si $\mathrm{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas $\mathrm{Tr}A = 2\cos\theta$ est un entier ce qui impose $2\cos\theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Les cas $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$ ont déjà été étudié.

- Si $\cos\theta = 0$, $\mathrm{Sp}A = (i, -i)$ et A est semblable à $\mathrm{diag}(i, -i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.
- Si $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{Sp}A = (j, j^2)$ ou $\mathrm{Sp}A = (-j, -j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.

Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

n° 12 : On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.
- C'est clair pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle. Soient A une matrice carrée de format $n+1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique $(e_1, ..., e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \mathrm{Tr}(f) = k(n+1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice n° 25, planche 1). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$.

Puis $\mathrm{Tr}A' = \mathrm{Tr}A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.

Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & A_1 & & \\ \vdots & & & & \\ \times & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

n° 13 : $\det M = \det\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ($\forall k \in [\![1, n]\!]$, $L_k \leftarrow L_k - L_{n+k}$) et donc $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M = (-3)^n(\det A)^2.}$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

On pose $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n. Sois $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$NZ = \lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX = \lambda X \text{ et } 3AY = \lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Leftrightarrow (X \neq 0 \text{ ou } Y \neq 0) \text{ et } (X \in \text{Ker}(A + \lambda I) \text{ et } Y \in \text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant λ s'en suit :

1er cas. Si $-\lambda$ et $\dfrac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M.

2ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$ où X décrit Ker$(A + \lambda I)$. La dimension de E_λ est alors dim(Ker$(A + \lambda I)$.

3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$ où Y décrit Ker$\left(A - \dfrac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors dim$\left(\text{Ker}\left(A - \dfrac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\dfrac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X + 2Y \\ X + Y \end{pmatrix}$ où X décrit Ker$(A+\lambda I)$ et Y décrit Ker$\left(A - \dfrac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors dim(Ker$(A+\lambda I)) + \text{dim}\left(\text{Ker}\left(A - \dfrac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A)) + \dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\text{Ker}M) = 2\dim(\text{Ker}A)$). Comme les applications $\lambda \mapsto -\lambda$ et $\lambda \mapsto \dfrac{\lambda}{3}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur lui-même,

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\ &\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

n° 14 : $\chi_A = \begin{vmatrix} -X & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & -X \end{vmatrix}$. Soit $f(x) = \begin{vmatrix} -X + x & b + x & \dots & b + x \\ a + x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ a + x & \dots & a + x & -X + x \end{vmatrix}$.

f est un polynôme en x. Par n linéarité du déterminant, $f(x)$ est somme de 2^n déterminants dont $2^n - (n + 1)$ sont nuls car contiennent deux colonnes de x. Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de x et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en x. f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres A et B tels que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = Ax+B$. Les égalités $f(-a) = (-X-a)^n$ et $f(-b) = (-X-b)^n$ fournissent $\begin{cases} -aA + B = (-X - a)^n \\ -bA + B = (-X - b)^n \end{cases}$ et comme $a \neq b$, les formules de Cramer fournissent

$$\chi_A = f(0) = B = \frac{1}{b - a}(b(-X - a)^n - a(-X - b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \text{ch}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda + a}{\lambda + b}\right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{\lambda + a}{\lambda + b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe $-a$ et B le point du plan d'affixe $-b$ puis $k = \left|\dfrac{a}{b}\right|^{1/n}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \text{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \text{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Rightarrow (1 - k)\overrightarrow{MI}.(1 + k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I, J] \text{ (cercles d'Appolonius (de Perga)).} \end{aligned}$$

n° 15 : **1)** Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A.

2) a) Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

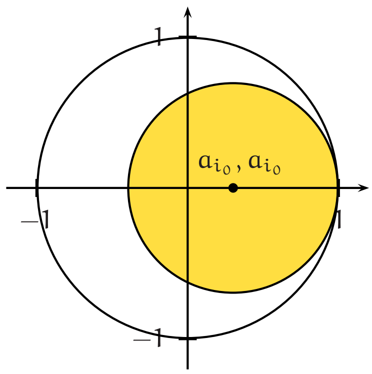
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

b) Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left|\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = (1 - a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|$$

et donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre a_{i_0,i_0} et de rayon $1 - a_{i_0,i_0}$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 en le point $(1,0)$.



n° 16 (**) : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$. Dans ce cas

$$\chi_A = \det(A - XI) = \det({}^t(A - XI)) = \det(-A - XI) = (-1)^n\det(A + XI) = (-1)^n\chi_A(-X)$$

Ainsi, χ_A a la parité de n.

n° 17 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier $\mathrm{Sp}A = \{-1,1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

n° 18 : **1)** $J^n = I$. J annule le polynôme $X^n - 1$ qui est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J.

Soient $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{array}\right.$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J. Les valeurs propres de J sont les n racines n-èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \text{Vect}(U_k)$. Soit P la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$ puis $D = \text{diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$, alors on a déjà vu que $P^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{P}$ (exercice n° 16) et on a

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\omega^j)_{1\leqslant j\leqslant n},\ P = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.}$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

2) Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), ..., Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n} a_j\right).}$$

n° 19 : 1) Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} \dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n,\ \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).}$$

2) a) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k \neq \sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

$$\boxed{\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.}$$

b) Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1).

$$\boxed{(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}), \times).}$$

3) Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si $C_1,\dots,C_n$ désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si } A=(C_1\dots C_n),\ AP_\sigma=(C_{\sigma(1)}\dots C_{\sigma(n)}).}$$

4) Commençons par trouver le polynôme caractéristique d'un cycle c de longueur ℓ ($1\leqslant \ell\leqslant n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell,n-\ell}\\ 0_{n-\ell,\ell} & I_{n-\ell}\end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matice du n° 18. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(-1)^n(X-1)^{n-\ell}(X^\ell-1)$ (voir n° 18).

Soit maintenant $\sigma\in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.
Posons donc $\sigma=c_1\circ\dots\circ c_p$, $p\geqslant 1$, où les c_i, $1\leqslant i\leqslant p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du cycle c_i, $1\leqslant i\leqslant p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0\\ 0 & \dots & 0 & I_k\end{pmatrix}$ où $k=n-\ell_1-\dots-\ell_p$ est le nombre de points fixes de σ.
Le polynôme caratéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma}=(-1)^n(X^{\ell_1}-1)\dots(X^{\ell_p}-1)(X-1)^{n-\ell_1-\dots-\ell_p}$. On en déduit immédiatement les valeurs propres de P_σ.

n° 20 : Posons $\chi_f=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\lambda_k-X)^{\alpha_k}$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Soit $E'_k=\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\mathrm{Id})^{\alpha_k}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1\leqslant k\leqslant p$. D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E=E'_1\oplus\dots\oplus E'_p$. De plus, si f_k est la restriction de f à E'_k alors f_k est un endomorphisme de E'_k (car f et $(f-\lambda_k\mathrm{Id})^{\alpha_k}$ commutent).
On note que $(f_k-\lambda_k)^{\alpha_k}=0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$.

Existence de d et n. On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1\leqslant k\leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n=f-d$.
d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E=E'_1\oplus\dots\oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d. De plus, $f=d+n$.
Soit n_k la restriction de n à E'_k. On a $n_k=f_k-\lambda_k\mathrm{Id}_{E'_k}$ et par définition de E'_k, $n_k^{\alpha_k}=0$. Mais alors, si on pose $\alpha=\mathrm{Max}\{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$, on a $n_k^\alpha=0$ pour tout k de $\{1,\dots,p\}$ et donc $n^\alpha=0$. Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd=dn$.

Unicité de d et n. Supposons que $f=d+n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd=dn$.
d commute avec n et donc avec f car $df=d^2+dn=d^2+nd=fd$. Mais alors, $n=f-d$ commute également avec f. d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k, $1\leqslant k\leqslant p$ de f. Pour $k\in[\![1,p]\!]$, on note d_k et n_k les restrictions de d et n à E'_k.

Soient $k\in[\![1,p]\!]$ puis μ une valeur propre de d_k. D'après l'exercice n° 7,

$$\det(f_k-\mu\mathrm{Id})=\det(d_k-\mu\mathrm{Id}+n)=\det(d_k-\mu\mathrm{Id})=0,$$

car $d_k-\mu\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k-\mu\mathrm{Id}$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k. Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k, on a donc $\mu=\lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir exercice n° 36), on a nécessairement $d_k=\lambda_k\mathrm{Id}_{E'_k}$ puis $n_k=f_k-\lambda_k\mathrm{Id}_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n.

n° 21 : On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4-3X^3+X^2-1$. La matrice compagnon $A=\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&3\end{pmatrix}$ convient (voir planche 4, exercice n° 15) et le théorème de Cayley-Hamilton montre que $A^4-3A^3+A^2-I_4=0$.

n° 22 : Soit A la matrice de l'énoncé. det$A$ est le produit des valeurs propres de A.
• Si $b = 0$, det$A = a^n$.
• Si $b \neq 0$, rg$(A-(a-b)I) = 1$ ou encore dim(Ker$(A-(a-b)I)) = n-1$. Par suite, $a-b$ est valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n-1)(a-b)+\lambda = na$ et donc $\lambda = a+(n-1)b$. Finalement det$A = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).}$$

n° 23 : A est de format 2 et donc, soit a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit a une valeur propre double λ non nulle car Tr$A = 2\lambda \neq 0$.
Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc est semblable à diag$(\lambda^2, \lambda^2) = \lambda^2 I$. Par suite, $A^2 = \lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2-\lambda^2 = (X-\lambda)(X+\lambda)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

n° 24 : **1)** Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$.
F est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est une application de E dans E. La linéarité de φ est claire et finalement

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})).}$$

2) Si f est dans Ker(φ) alors $f(0) = 0$ et pour tout x non nul, $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = 0$. Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ et donc $f = 0$. Finalement Ker$(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
φ n'est pas surjective car pour toute $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Mais alors par exemple, l'application $g : x \mapsto |x-1|$ est dans E mais n'est pas dans Im(φ).

$$\boxed{\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}}$$

3) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda \neq 0$.
Pour $x = 0$, nécessairement $f(0) = \lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda = 1$ ou bien $f(0) = 0$.
On doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. f est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \lambda x f(x)$ et par dérivation, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)).$$

Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)) &\Rightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x} f(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}} f'(x) + \frac{\lambda-1}{\lambda x} e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}} f(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in I,\ \left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} f\right)'(x) = 0 \\
&\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I,\ |x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} f(x) = K \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} /\ \forall x \in I,\ f(x) = K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$. La fonction $x \mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que dans le cas $K = 0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty,0[} = 0$, $f_{/]0,+\infty[} = 0$ et $f(0) = 0$ par continuité en 0. Dons f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda = 1$, les restriction de f à $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0, f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f) = f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda \in]0, 1[$, nécessairement $\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geq 0 \\ K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. f ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$. Calculons alors $\varphi(f)$.
$(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$ puis si $x > 0$,

$$(\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x K_1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\ dt = \frac{\lambda K_1}{x} x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

et de même si $x < 0$. Enfin, $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f) = \lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1 = K_2 = 1$ fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est (f_1, f_2) où $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \left\{\begin{array}{l} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$ et $f_2(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.
Finalement

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) =]0, 1].}$$

n° 25 : Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f.
Le polynôme $P = X(X-\lambda)(X-\mu) = X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + \lambda\mu X$ est annulateur de f. En effet,

$$\begin{aligned} P(f) &= f^3 - (\lambda+\mu)f^2 + \lambda\mu f = (\lambda^3 - (\lambda+\mu)\lambda^2 + (\lambda\mu)\lambda)u + (\mu^3 - (\lambda+\mu)\mu^2 + (\lambda\mu)\mu)v \\ &= P(\lambda)u + P(\mu)v = 0. \end{aligned}$$

• Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.
• Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et donc f est diagonalisable.
• Si par exemple $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$ et et le polynôme $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f. Dans ce cas aussi f est diagonalisable.
• Enfin si $\lambda = \mu \neq 0$, $f^2 = \lambda^2(u+v) = \lambda f$ et de nouveau $P = X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f.

Dans tous les cas , f est diagonalisable .

n° 26 : Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Si $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2 = N$, alors $X^6 = 0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3 = 0$. Mais alors $N^2 = X^4 = 0$ ce qui n'est pas . L'équation proposée n'a pas de solution.

n° 27 : Montrons le résultat par récurrence sur $n = \dim E \geqslant 1$.
• Si $n = 1$, c'est clair.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tels que $fg = gf$.
f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable E_λ. La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g.
Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g. Soit x un vecteur propre commun à f et g. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B} = (x, ...)$ de E. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices M et N de f et g s'écrivent respectivement $M = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \mu & \times \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n. Un calcul par blocs montre que M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible de format n P_1 et deux matrices triangulaires supérieures de format n T_1 et T_1' telles que $P_1^{-1}M_1P_1 = T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1 = T_1'$.
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$. P est inversible de format $n+1$ car $\det P = \det P_1 \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.
P est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de f et g.

n° 28 : Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. On a donc $\chi_A = (\lambda_1 - X)\dots(\lambda_n - X)$.

$$\begin{aligned}\chi_A(B) \text{ inversible} &\Leftrightarrow (B - \lambda_1 I)...(B - \lambda_n I) \text{ inversible}\\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ B - \lambda_k I \text{ inversible (car } \det((B - \lambda_1 I)...(B - \lambda_n I)) = \det(B - \lambda_1 I) \times ... \times \det(B - \lambda_n I))\\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \text{ n'est pas valeur propre de } B\\ &\Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \varnothing.\end{aligned}$$

n° 29 : Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + V\chi_f = 1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f) = 0$, on obtient $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = Id$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A est la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$).

n° 30 : $\text{rg}(M_{a,b} - I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.
Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.
$(M_{1,0} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

n° 31 : Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n - 1$ (planche 2, exercice n° 18).

Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale U^tV où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici $U = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

Si A existe, A doit déjà vérifier $A^ttB = {}^tBA = 0$ ou encore $AV^tU = 0$ (1) et $V^tUA = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n - 1$ dernières devant alors former une famille libre).
De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par ${}^tV$ à gauche, on obtient ${}^tUA = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$ qui convient.

n° 32 : (Si les a_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)
Si tous les a_k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.
On suppose dorénavant que l'un au moins des a_k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, est non nul. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.
0 est valeur propre d'ordre $n - 2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ et μ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = a_n\\ \lambda^2 + \mu^2 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\end{array}\right.$ qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = a_n\\ \lambda^2 + \mu^2 = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\end{array}\right.$ (S).
On a alors les situations suivantes :
• Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
• Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n - 2$, la dimension du noyau de A.

• Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda I) = n - 2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\mathrm{rg}(A - \lambda I) = n - 1$ en considérant la matrice extraite formée des n-1 premières lignes et colonnes.

En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.

Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation (E) : $X^2 - a_nX - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$.

Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

n° 33 : 1) $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-2X) - (2-X) + (2-X) = -X(X-1)(X-2)$.

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \mathrm{Vect}(e1)$ où $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1,-1,-1)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,1,1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P est un endomorphisme de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ divise celui de f. $f_{/P}$ est diagonalisable car f l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc $f_{/P}$. On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de $f_{/P}$ qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $P_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

2) $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-5X+4) - (-2X+2) + (X-1) = (1-X)((X-2)(X-4)-2-1) = (1-X)(X^2+6X-5) = -(X-1)^2(X-5)$. Puis E_1 est le plan d'équation $x+2y+z=0$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.
On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x, y, -x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc $f_{/P}$ est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x+2y+z=0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x+2y+z=0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x + (2a+2b)y + (b-a)z = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

3) $\chi_A = \begin{vmatrix} 6-X & -6 & 5 \\ -4 & -1-X & 10 \\ 7 & -6 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2-3X+56) + 4(6X+6) + 7(5X-55) = -X^3 + 9X^2 - 15X - 25 = -(X+1)(X^2-10X+25) = -(X+1)(X-5)^2$.
$E_{-1} = \mathrm{Vect}(10,15,4)$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X-1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$.
Dans le premier cas, $f_{/P}$ est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\mathrm{Vect}((10,15,4)) + \mathrm{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x - 6y - 5z = 0$.
Dans le deuxième cas, $\chi_{f_{/P}} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de $f_{/P}$. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $(f_{/P} - 5Id)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\mathrm{Ker}(f-5Id)^2$. $\mathrm{Ker}(f-5Id)^2$ est leplan d'équation $x = z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5Id)^2$ commute avec f.

n° 34 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0 . $\mathrm{Tr}A = 0$ et donc la troisième valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = -X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A. $A^2 = 0$. Donc $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\mathrm{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\mathrm{Im}A$ que l'on complète en (e_1, e_2) base de $\mathrm{Ker}A$.
(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ alors $A(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$ c'est-à-dire $ce_2 = 0$ et donc $c = 0$. Puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1, e_2, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit peut prendre $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $X^2 = A$, X commute avec A et donc X laisse stable ImA et KerA. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans Vect(e_1, e_2). Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique $(a-\lambda)(c-\lambda)(f-\lambda)$. On a donc nécessairement $a = c = f = 0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -7a & 0 & \dfrac{3}{a} - 7b \\ -14 & 0 & -\dfrac{1}{a} - 14b \\ -7a & 0 & -7b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a - \dfrac{3}{7a} + b & a - \dfrac{9}{7a} + 3b & \dfrac{3}{a} - 7b \\ -4a + \dfrac{1}{7a} + 2b1 & 2a + \dfrac{3}{7a} + 6b & -\dfrac{1}{a} - 14b \\ -2a + b & a + 3b & -7b \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

n° 35 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-5X+4) - (-2+2X) = (1-X)(X^2 - 5X + 4 + 2) = -(X-1)(X-2)(X-3)$.

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont des droites.
Si M est une matrice qui commute avec A, M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A.

$$C(A) = \{P\mathrm{diag}(a, b, c)P^{-1},\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}.$$

On trouve $C(A) = \left\{\begin{pmatrix} 2b - c & -a + 2b - c & \dfrac{a-c}{2} \\ -b + c & a - b + c & (-a+c)/2 \\ 2c - 2b & -2b + c & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\right\}$. On peut vérifier que $C(A) = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.

n° 36 : F est stable par f et donc $f_{/F}$ est un endomorphisme de F. f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors $P(f_{/F}) = 0$ et on a trouvé un polynôme scindé à racines simples annulateur de $f_{/F}$. Donc $f_{/F}$ est diagonalisable.

n° 37 : Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont à choisir dans $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $(-1)^n X^\alpha (X-j)^\beta (X-j^2)^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \bar{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.
Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker} A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\mathrm{rg} A$ est un entier pair.