Planche n^o 6. Séries numériques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n^o 1 : Nature de la série de terme général

1) (*) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **2) (*)** $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **3) (**)** $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$ **4) (**)** $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\, n)}$

5) (**) $\mathrm{Arccos}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}$ **6) (*)** $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$ **7)** $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **8) (**)** $\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{n^2+1}{n}\right)$

9) (*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ **10) (**)** $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$ **11) (**)** $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

n^o 2 : Même énoncé.

1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2}-\sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. **2) (**)** $\dfrac{1}{n^\alpha}S(n)$ où $S(n)=\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.

3) (**) u_n où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.

4) (****) $u_n=\dfrac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier

(indication : considérer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\dots\right)$).

5) (***) $u_n=\dfrac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.

6) (*) $\dfrac{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ $a>0$ et $b>0$. **7) (**)** $\mathrm{Arctan}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^a\right)-\mathrm{Arctan}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^a\right)$.

8) (**) $\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}$. **9) (***)** $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right)-1$.

n^o 3 : Même énoncé.

1) (***) $\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$ **2) (**)** $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ **3) (**)** $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **4) (***)** $\dfrac{e^{in\alpha}}{n}$, $\dfrac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}$

5) (**) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ **6)** $(-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

7) (****) $(\sin(n!\pi e))^p$ p entier naturel non nul.

n^o 4 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

1) (**) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ **2) (**)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ **3) (***)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$

4) (*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ **5) (**)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **6) (***)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{th}\,\frac{a}{2^n}}{2^n}$

n^o 5 (* i) :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

n° 6 (***) : Soit σ une injection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

n° 7 (**) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\displaystyle\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

n° 8 (***) : Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

n° 9 (***) : Nature de la série de terme général $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

n° 10 (**) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

n° 11 (***) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n=\dfrac{u_n}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$, $n\geqslant 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

n° 12 (****) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=u_0+...+u_n$. Etudier en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

n° 13 (**) : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n\geqslant 1$.

n° 14 (****) : On sait que $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots=\ln 2$.
A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p=3$ et $q=2$, on s'intéresse à $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\ldots$). Convergence et somme de cette série .

n° 15 (***) : Nature de la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$.

n° 16 : Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

1) (**) $u_n=\dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$ **2) (***)** $u_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$, $n\geqslant 1$, $a\in\mathbb{R}^{+*}$ donné.

n° 17 (*) : Nature de la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^p}$, $p\in]0,+\infty[$.

n° 18 (**) : Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ quand n tend vers l'infini (a réel positif donné).

n° 19 (I) :** Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

n° 20 (* I) :** Développement limité à l'ordre 4 de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

n° 21 : Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1) (***)} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} \qquad \textbf{2) (**)} \sum_{p=1}^{n} p^p.$$

n° 22 (***) : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

n° 23 (**) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

n° 24 (****) : Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(v_n)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_nv_n$).

n° 25 (***) : Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.