

# Planche n° 6. Séries. Corrigé

n° 1 : 1) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \ln \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$ .  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n$  existe

$$u_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) - \left( \frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) = o \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , converge (série de RIEMANN d'exposant  $\alpha > 1$ ), la série de terme général  $u_n$  converge.

2) Pour  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ .  $\forall n \geq 2$ ,  $u_n$  existe et de plus  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Comme la série de terme général  $\frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge et est positive, la série de terme général  $u_n$  diverge.

3) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left( \frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n > 0$  et

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(n) \ln \left( \frac{n+3}{2n+1} \right) = \ln(n) \left( \ln \left( \frac{1}{2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \left( -\ln 2 + o \left( \frac{1}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln 2 \ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Donc  $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$ . Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^{\ln 2}}$ ,  $n \geq 1$ , diverge (série de RIEMANN d'exposant  $\alpha \leq 1$ ) et est positive, la série de terme général  $u_n$  diverge.

4) Pour  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \frac{1}{\ln(n) \ln(\text{ch } n)}$ .  $u_n$  existe pour  $n \geq 2$ .  $\ln(\text{ch } n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( \frac{e^n}{2} \right) = n - \ln 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)} > 0$ .

Vérifions alors que la série de terme général  $\frac{1}{n \ln n}$ ,  $n \geq 2$ , diverge. La fonction  $x \rightarrow x \ln x$  est continue, croissante et strictement positive sur  $]1, +\infty[$  (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur  $]1, +\infty[$ ). Par suite, la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$  est continue et décroissante sur  $]1, +\infty[$  et pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Par suite, pour  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Donc  $u_n$  est positif et équivalent au terme général d'une série divergente. La série de terme général  $u_n$  diverge.

5) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \text{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$ .  $u_n$  existe pour  $n \geq 1$ . De plus  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin(u_n) &= \sin \left( \text{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} \right) = \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{2/3}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{1 - 1 + \frac{2}{3n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

terme général d'une série de RIEMANN divergente. La série de terme général  $u_n$  diverge.

6) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$ .  $u_n$  existe et  $u_n \neq 0$  pour  $n \geq 1$ . De plus,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général  $u_n$  converge.

7) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ .  $u_n$  est défini pour  $n \geq 1$  car pour  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ . Ensuite

$$\ln \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis  $n \ln \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et donc

$$u_n = e^{n \ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} \left(e^{-\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général  $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$  est divergente et donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

8)

$$\ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) = \ln \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \\ \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0.$$

Donc, la série de terme général  $u_n$  diverge.

9) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$ .

Pour  $n \geq 1$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et positive et donc,  $u_n$  existe et est positif. De plus, pour  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2 + 0} dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général  $\frac{\pi}{2n^2}$  converge et donc la série de terme général  $u_n$  converge.

10)  $-\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = -\sin \left(\frac{1}{n}\right) - \cos \left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$  puis

$$-\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\ln(n) + o(1).$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge et la série de terme général  $u_n$  diverge.

11)  $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général  $\frac{e}{2n}$  diverge et la série de terme général  $u_n$  diverge.

**n° 2 :** 1) Si  $P$  n'est pas unitaire de degré 3,  $u_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement. Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré 3. Posons  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

$$\begin{aligned} u_n &= n \left( \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{1/4} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right)^{1/3} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left( \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 + \frac{a}{3n} + \frac{b}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{a}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

- Si  $a \neq 0$ ,  $u_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement.
- Si  $a = 0$  et  $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} \neq 0$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right) \frac{1}{n}$ .  $u_n$  est donc de signe constant pour  $n$  grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général  $u_n$  diverge.
- Si  $a = 0$  et  $\frac{1}{2} - \frac{b}{3} = 0$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Dans ce cas, la série de terme général  $u_n$  converge (absolument).

En résumé, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $a = 0$  et  $b = \frac{3}{2}$  ou encore la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $P$  est de la forme  $X^3 + \frac{3}{2}X + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

2) Pour  $n \geq 2$ , posons  $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$ . Pour  $n \geq 2$ ,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc  $\forall n \geq 2$ ,  $S(n) \leq \frac{S(2)}{2^{n-2}}$ . Par suite,

$$u_n \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel  $\alpha$ , la série de terme général  $u_n$  converge.

3)  $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 0$ . Par suite,  $\forall n \geq 2$ ,  $0 < u_n < \frac{1}{n}$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et par suite  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ . La série de terme général  $u_n$  diverge.

4) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Notons  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite croissante des nombres premiers. La suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite strictement croissante d'entiers et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$ .

Par suite,  $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$  et les séries de termes généraux  $\frac{1}{p_n}$  et  $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$  sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général  $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ .

Montrons que  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geq \ln\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}\right)$ .

Soit  $n \geq$ . Alors  $\frac{1}{p_n} < 1$  et la série de terme général  $\frac{1}{p_n^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est une série géométrique convergente de somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}.$$

Soit alors  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $p_1 < p_2 \dots < p_n$  la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $N$ .

Tout entier entre 1 et  $N$  s'écrit de manière unique  $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$  où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$  et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \right) &\geq \sum_{k=1}^n \ln \left( \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \right) \quad (\text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*, \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^n \ln \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i} \right) \geq \sum_{k=1}^n \ln \left( \sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i} \right) \\
&= \ln \left( \prod_{k=1}^n \left( \sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i} \right) \right) = \ln \left( \sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n} \frac{1}{p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}} \right) \\
&\geq \ln \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right).
\end{aligned}$$

Or  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) = +\infty$  et donc  $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \right) = +\infty$ .

La série de terme général  $\ln \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$  diverge et il en est de même de la série de terme général  $\frac{1}{p_n}$ .

(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

5) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $n = a_p \times 10^p + \dots + a_1 \times 10 + a_0$  où  $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  et  $a_p \neq 0$ . Alors  $c(n) = p + 1$ . Déterminons  $p$  en fonction de  $n$ . On a  $10^p \leq n < 10^{p+1}$  et donc  $p = E(\log(n))$ . Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(E(\log n) + 1)^\alpha}.$$

Par suite,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^\alpha(10)}{n \ln^\alpha(n)}$  et la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  (séries de BERTRAND). Redémontrons ce résultat qui n'est pas un résultat de cours.

La série de terme général  $\frac{1}{n \ln n}$  est divergente (voir n° 1, 4). Par suite, si  $\alpha \leq 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)}$  est divergente car  $\forall n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n \ln^\alpha(n)} \geq \frac{1}{n \ln n}$ .

Soit  $\alpha > 1$ . Puisque la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\alpha x}$  est continue et strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ , pour  $k \geq 3$ ,

$$\frac{1}{k \ln^\alpha k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx$$

puis, pour  $n \geq 3$ , en sommant pour  $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^\alpha k} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \int_2^n \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs, de terme général  $\frac{1}{k \ln^\alpha k}$ , est majorée et donc la série de terme général  $\frac{1}{k \ln^\alpha k}$  converge.

6 Soit  $n \geq 2$ .

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\ln^\alpha(n+1)}{(n+1)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 < 1$$

et d'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général  $u_n$  converge.

7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ . Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tan(u_n) \\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha}{1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{2\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha = 0$ .

8) La fonction  $x \mapsto x^{3/2}$  est continue et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc pour  $k \geq 1$ ,  $\int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq k^{3/2} \leq \int_k^{k+1} x^{3/2} dx$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^n x^{3/2} dx \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^{3/2} dx \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} x^{3/2} dx = \int_1^{n+1} x^{3/2} dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leq \sum_{k=1}^n k^{3/2} \leq \frac{2}{5}((n+1)^{5/2} - 1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^n k^{3/2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$ . La série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > \frac{7}{2}$ .

9) Pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \left(1 + \frac{2}{n^\alpha}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geq \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \dots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Comme  $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$ , si  $\alpha \leq 3$ , on a  $\alpha - 2 \leq 1$  et la série de terme général  $u_n$  diverge.

Si  $\alpha > 3$ ,

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leq \left(1 + \frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \text{ terme général d'une série de RIEMANN convergente,} \end{aligned}$$

et, puisque  $\alpha - 2 > 1$ , la série de terme général  $u_n$  converge. Finalement, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 3$ .

**n° 3 :** 1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2 - 1 + 1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite  $\left((-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général  $u_n$  converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) (la suite  $\left(\frac{1}{n + (-1)^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas décroissante à partir d'un certain rang).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n}$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général  $u_n$  converge.

3)  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ . Les séries de termes généraux respectifs  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$  sont convergentes et la série de terme général  $-\frac{1}{2n}$  est divergente. Si la série de terme général  $u_n$  convergerait alors la série de terme général  $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$  convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

**Remarque.** La série de terme général  $u_n$  diverge bien que  $u_n$  soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4) Si  $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ , alors les deux premières séries divergent et la dernière converge.

Soit  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $v_n = e^{in\alpha}$  et  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  de sorte que  $u_n = \varepsilon_n v_n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons encore

$$V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

Pour  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , posons enfin  $R_n^p = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$ . (On effectue alors une transformation d'ABEL).

$$\begin{aligned} R_n^p &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} V_k \\ &= \varepsilon_{n+p} V_{n+p} - \varepsilon_{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k. \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n = e^{i\alpha} \frac{e^{in\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = e^{i\alpha} \frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|V_n| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$ . Par suite, pour  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned} |R_n^p| &= \left| \frac{1}{n+p} V_{n+p} - \frac{1}{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) V_k \right| \\ &\leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|} \left( \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|} \left( \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{2}{|\sin(\alpha/2)|(n+1)} \\ &\leq \frac{2}{n|\sin(\alpha/2)|}. \end{aligned}$$

Soit alors  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Pour  $n \geq E\left(\frac{2}{\varepsilon|\sin(\alpha/2)|}\right) + 1$  et  $p$  entier naturel non nul quelconque, on a  $|R_n^p| < \varepsilon$ .

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall (n, p) \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right| < \varepsilon)$ .

Ainsi, la série de terme général  $u_n$  vérifie le critère de CAUCHY et est donc convergente. Il en est de même des séries de termes généraux respectifs  $\frac{\cos(n\alpha)}{n} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$  et  $\frac{\sin(n\alpha)}{n} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{in\alpha}}{n}\right)$ .

5) Pour  $x \in ]0, +\infty[$ , posons  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > e$ ,  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} < 0$ .

Donc, la fonction  $f$  est décroissante sur  $[e, +\infty[$ . On en déduit que la suite  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$  est une suite décroissante. Mais

alors la série de terme général  $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

6) • Si  $\deg P \geq \deg Q$ ,  $u_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $u_n$  est grossièrement divergente.

• Si  $\deg P \leq \deg Q - 2$ ,  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

• Si  $\deg P = \deg Q - 1$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\operatorname{dom} P}{n \operatorname{dom} Q} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .  $u_n$  est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général  $u_n$  converge.

En résumé, la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\deg P < \deg Q$ .

7)  $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  puis pour  $n \geq 2$ ,  $n!e = 1 + n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$ .

Pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $\frac{n!}{k!}$  est un entier divisible par  $n(n-1)$  et est donc un entier pair que l'on note  $2K_n$ . Pour  $n \geq 2$ , on obtient

$$\sin(n!e\pi) = \sin\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour  $k \geq n+3$ ,  $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$  et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que  $\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement,  $\sin(n!\pi e) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

$\sin(n!\pi e)$  est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général  $\sin(n!\pi e)$  converge.

Si  $p \geq 2$ ,  $|\sin^p(n!\pi e)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^p}{n^p}$  et la série de terme général  $\sin^p(n!\pi e)$  converge absolument.

**n° 4 :** 1)  $\frac{n+1}{3^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par suite, la série de terme général  $\frac{n+1}{3^n}$  converge.

**1er calcul.** Soit  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= (S-1) - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $S = \frac{9}{4}$ .

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}}$$

**2ème calcul.** Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k.$$

Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = f'_n(x) = \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Pour  $x = \frac{1}{3}$ , on obtient  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^{n-1}} + 1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}$  et quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient de nouveau  $S = \frac{9}{4}$ .

2) Pour  $k \geq 3$ ,  $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$ . Puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} = \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} \times \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{7}{12} + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1). \end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme  $\frac{89}{96}$ .

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $1^{3k} + j^{3k} + (j^2)^{3k} = 3$  puis  $1^{3k+1} + j^{3k+1} + (j^2)^{3k+1} = 1 + j + j^2 = 0$  et  $1^{3k+2} + j^{3k+2} + (j^2)^{3k+2} = 1 + j^2 + j^4 = 0$ . Par suite,

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n + j^n + (j^2)^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!},$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3} (e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3} \left( e + e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left( e + 2e^{-1/2} \operatorname{Re}(e^{-i\sqrt{3}/2}) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left( e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right).}$$

4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \right) &= \sum_{k=2}^n \left( \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \text{ (somme télescopique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5)  $\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Donc la série de terme général  $\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$  converge.

Posons  $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$  puis pour  $n \geq 2$ ,  $S_n = \sum_{k=2}^n \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$ . Puisque la série converge  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2p+1}$  avec

$$\begin{aligned} S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{k=1}^p \left( \ln \left( 1 - \frac{1}{2k+1} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^p (\ln(2k) - \ln(2k+1) + \ln(2k+1) - \ln(2k)) = 0 \end{aligned}$$

et quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $S = 0$ .

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0.$$

6) Si  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{a}{2^n} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0$ .

Ensuite,  $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$  et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \quad (\text{produit télescopique}) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1} \times \frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right). \end{aligned}$$

$$\forall a \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).$$

7) Vérifions que pour tout réel  $x$  on a  $\text{th}(2x) = \frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \text{ch}(2x) \quad \text{et} \quad 2 \text{sh } x \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \text{sh}(2x) \text{ puis}$$

$$\frac{2 \text{th } x}{1 + \text{th}^2 x} = \frac{2 \text{sh } x \text{ch } x}{\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x} = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \text{th}(2x).$$

Par suite, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\text{th } x = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th } x}$ . Mais alors, pour  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \text{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left( \frac{2}{\text{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\text{th}\frac{a}{2^k}} \right) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2^{k-1} \text{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k \text{th}\frac{a}{2^k}} \right) \\ &= \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{2^n \text{th}\frac{a}{2^n}} \quad (\text{somme télescopique}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand  $a = 0$ .

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\text{th}(2a)} - \frac{1}{a}.$$

**n° 5 :** Il faut vérifier que  $n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} 0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n} + \dots + u_{2n}}_n) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \quad (\text{car la suite } u \text{ est décroissante}) \\ &= 2(S_{2n} - S_n). \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général  $u_n$  converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)u_{2n} = 0$ .

Ensuite,  $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite  $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$  ou encore que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Contre exemple avec  $u$  non monotone. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . La suite  $u$  est

positive et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$ . Pourtant,  $p^2 u_{p^2} = 1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$  et la suite  $(nu_n)$  admet une suite extraite convergeant vers 1. On a donc pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ .

**n° 6 :** Soit  $\sigma$  une permutation de  $[[1, n]]$ . Montrons que la suite  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$ ,  $n \geq 1$ , ne vérifie pas le critère de CAUCHY. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \\ &\geq \frac{1}{4n^2} (1 + 2 + \dots + n) \text{ (car les } n \text{ entiers } \sigma(k), 1 \leq k \leq n, \text{ sont strictement positifs et deux à deux distincts)} \\ &= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Si la suite  $(S_n)$  converge, on doit avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$  ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc la série de terme général  $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , diverge.

**n° 7 :** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n = \ln(1 + u_n)$ ,  $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$  et  $t_n = \int_0^{u_n} \frac{dx}{1 + x^e}$ .

• Si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $0 \leq u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ . Dans ce cas, les séries de termes généraux  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  sont de même nature.

D'autre part, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_n}{1 + u_n^e} \leq t_n \leq u_n$  puis  $\frac{1}{1 + u_n^e} \leq \frac{t_n}{u_n} \leq 1$  et donc  $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ . Les séries de termes généraux  $u_n$  et  $t_n$  sont aussi de même nature.

• Si  $u_n$  ne tend pas vers 0, la série de terme général  $u_n$  est grossièrement divergente. Puisque  $u_n = e^{v_n} - 1$ ,  $v_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $v_n$  est grossièrement divergente. Dans ce cas aussi, les séries de termes généraux sont de même nature.

De même, puisque  $w_n = \frac{u_n}{1 + u_n} < 1$ , on a  $u_n = \frac{w_n}{1 - w_n}$  et  $w_n$  ne peut tendre vers 0.

Enfin, puisque  $u_n$  ne tend pas vers 0, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout entier naturel  $N$ , il existe  $n = n(N) \geq N$  tel que  $u_n \geq \varepsilon$ . Pour cet  $\varepsilon$  et ces  $n$ , on a  $t_n \geq \int_0^\varepsilon \frac{dx}{1 + x^e} > 0$  (fonction continue, positive et non nulle) et la suite  $t_n$  ne tend pas vers 0. Dans le cas où  $u_n$  ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes.

**n° 8 :** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = (n+1)! \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \end{aligned}$$

On a  $0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \frac{1}{(n+2)^5} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leq \frac{1}{n^5}$ . On en

déduit que  $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ . Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right) \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \left(1 - \frac{4}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

**n° 9 :** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = \sin\left(\pi(2 + \sqrt{3})^n\right)$ . D'après la formule du binôme de NEWTON,  $(2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$  où  $A_n$  et  $B_n$  sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi  $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ . Par suite,  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2A_n$  est un entier pair. Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi(2 - \sqrt{3})^n\right) = -\sin\left(\pi(2 - \sqrt{3})^n\right).$$

Mais  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$  et donc  $(2 - \sqrt{3})^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On en déduit que  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi(2 - \sqrt{3})^n$  terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général  $u_n$  converge.

**n° 10 :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\left(\sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right)^2$  et donc  $0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$ . Comme la série terme général  $\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$  converge, la série de terme général  $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$  converge.

**n° 11 :** Pour  $n \geq 2$ ,  $v_n = \frac{u_n + 1 - 1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)} = \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_{n-1})} - \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)}$  et d'autre part  $v_1 = 1 - \frac{1}{1 + u_1}$ . Donc, pour  $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1 + u_1) \dots (1 + u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général  $u_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et donc  $0 < u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1 + u_n)$ . Donc la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  converge ou encore la suite  $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)\right)_{n \geq 1}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . Mais alors la suite

$\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)_{n \geq 1}$  converge vers le réel strictement positif  $P = e^\ell$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$  converge vers  $1 - \frac{1}{P}$ .

Si la série de terme général  $u_n$  diverge alors la série de terme général  $\ln(1 + u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et il en est de même que la suite  $\left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k)\right)_{n \geq 1}$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$  converge vers 1.

**n° 12 :** Etudions tout d'abord la convergence de la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$ .

Si  $\frac{u_n}{S_n}$  tend vers 0 alors

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . On en déduit que la série de terme général  $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$  est divergente car  $\sum_{k=1}^n \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_0) \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas, la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  diverge ce qui est aussi le cas si  $\frac{u_n}{S_n}$  ne tend pas vers 0.

Donc, dans tous les cas, la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  diverge.

Si  $\alpha \leq 1$ , puisque  $S_n$  tend vers  $+\infty$ , à partir d'un certain rang on a  $S_n^\alpha \leq S_n$  et donc  $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{u_n}{S_n}$ . Donc, si  $\alpha \leq 1$ , la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$  diverge.

Si  $\alpha > 1$ , puisque la suite  $(S_n)$  est croissante,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^\alpha} \leq \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right),$$

qui est le terme général d'une série télescopique convergente puisque  $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Dans ce cas, la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge.

La série de terme général  $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**n° 13 :** Si  $\alpha < 0$ ,  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n^{-2\alpha}$  et si  $\alpha = 0$ ,  $u_n = 1 + (-1)^n$ . Donc si  $\alpha \leq 0$ ,  $u_n$  ne tend pas vers 0. La série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement dans ce cas.

On suppose dorénavant que  $\alpha > 0$ . Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $|u_n| \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  et donc la série de terme général  $u_n$  converge absolument si et seulement si  $\alpha > 1$ .

Il reste à étudier le cas où  $0 < \alpha \leq 1$ . On a  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}$ . La suite  $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$  tend vers 0 en décroissant et donc la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. On en déduit que la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si la série de terme général  $\frac{1}{n^{2\alpha}}$  converge ou encore si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

En résumé

Si  $\alpha \leq 0$ , la série de terme général  $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$  diverge grossièrement,  
 si  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , la série de terme général  $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$  diverge,  
 si  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , la série de terme général  $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$  est semi convergente,  
 si  $\alpha > 1$ , la série de terme général  $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$  converge absolument.

**n° 14 :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série considérée et on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Il est connu que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_{m(p+q)} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2} + \dots + \frac{1}{4q}\right) + \dots \\ &+ \left(\frac{1}{2(m-1)p+1} + \dots + \frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2} + \dots + \frac{1}{2mq}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp} + H_{mq}) \\ &\underset{m \rightarrow +\infty}{=} (\ln(2mp) + \gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp) + \gamma + \ln(mq) + \gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite extraite  $(S_{m_n(p+q)})_{m \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right)$ .

Montrons alors que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un unique entier naturel non nul  $m_n$  tel que  $m_n(p+q) \leq n < (m_n+1)(p+q)$  à savoir  $m_n = E \left( \frac{n}{p+q} \right)$ .

$$\begin{aligned} |S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leq \frac{1}{2m_n p + 1} + \dots + \frac{1}{2(m_n+1)p - 1} + \frac{1}{2m_n q + 2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\ &\leq \frac{p}{2m_n p + 1} + \frac{q}{2m_n q + 2} \leq \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}. \end{aligned}$$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{m_n} < \frac{\varepsilon}{2}$  et aussi  $\left| S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Pour  $n \geq n_0$ , on a alors

$$\begin{aligned} \left| S_n - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) \right| &\leq |S_n - S_{m_n(p+q)}| + \left| S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) \right| \leq \frac{1}{m_n} + \left| S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \left| S_n - \left( \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) \right) \right| < \varepsilon)$  et donc, la série proposée converge et a pour somme  $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right)$ .

**n° 15 :** La série proposée est le produit de CAUCHY de la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ ,  $n \geq 1$ , par elle même.

- Si  $\alpha > 1$ , on sait que la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  converge absolument et donc que la série proposée converge.
- Si  $0 \leq \alpha \leq 1$ , pour  $0 < k < n$  on a  $0 < k(n-k) \leq \frac{n}{2} \left( n - \frac{n}{2} \right) = \frac{n^2}{4}$ . Donc  $u_n \geq \frac{n-1}{\left( \frac{n^2}{4} \right)^\alpha}$  avec  $\frac{n-1}{\left( \frac{n^2}{4} \right)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ .

Comme  $2\alpha - 1 \leq 1$ , la série proposée diverge.

- Si  $\alpha < 0$ ,  $u_n \geq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$  et donc  $u_n$  ne tend pas vers 0. Dans ce cas, la série proposée diverge grossièrement.

**n° 16 :** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79 \\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \right) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80 \left( e - \frac{5}{2} \right) \\ &= -40e + 111. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40e + 111.}$$

2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1} u_n$ . Par suite  $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$  puis

$$(1-a) \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^n (k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si  $a = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n+1}$ . Dans ce cas, la série diverge.

Si  $a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$ .

Si  $a > 1$ , la suite  $u$  est strictement positive et la suite des sommes partielles  $(S_n)$  est majorée par  $\frac{1}{a-1}$ . Donc la série de terme général  $u_n$  converge. Il en est de même de la suite  $((a+n+1)u_{n+1})$ . Soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a+n+1)u_{n+1}$ .

Si  $\ell \neq 0, u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$  contredisant la convergence de la série de terme général  $u_n$ . Donc  $\ell = 0$  et

$$\text{si } a > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si  $0 < a < 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{2 \times 3 \dots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$ . Dans ce cas, la série diverge.

**n° 17 :** Pour tout entier naturel non nul  $n, 0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$  et la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $p > 2$ .

**n° 18 :** (On applique la règle de RAABE-DUHAMEL qui n'est pas un résultat de cours.) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = \frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{a+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et « on sait » qu'il existe un réel strictement positif  $K$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$ .

**n° 19 :**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**n° 20 :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ . Puisque la série de terme général  $\frac{1}{k^2}, k \geq 1$ , converge, la suite  $(R_n)$  est définie et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$0 < \frac{1}{k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  et puisque la série de terme général  $\frac{1}{k^2}$  converge, la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \text{ (surtout ne pas décomposer en deux sommes)} \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ou encore  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Plus précisément, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$ .

Or  $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)}$  puis  
 $\frac{1}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$  et donc

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} \\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}
\end{aligned}$$

Ensuite  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^5} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4}$  ou encore  $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ . Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{k(k-1)} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{N(N-1)} \right) = \frac{1}{2n(n-1)} \\
&= \frac{1}{2n^2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^N \left( \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} - \frac{1}{k(k-1)(k-2)} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left( \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{N(N-1)(N-2)} \right) = \frac{2}{3n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{2}{3n^3} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{3n^3} \left( 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

et finalement

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} \right) + \left( \frac{2}{3n^3} + \frac{2}{n^4} \right) - \frac{3}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

**n° 21 : 1)** La suite  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0, en décroissant à partir du rang 3 (fourni par l'étude de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur  $[e, +\infty[$ ) et donc la série de terme général  $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ ,  $n \geq 1$ , converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$ .

$(-1)^k \frac{\ln k}{k}$  n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang et on ne peut donc lui appliquer la règle de l'équivalence des restes.

Par contre, puisque la série de terme général  $(-1)^k \frac{\ln k}{k}$  converge, on sait que l'on peut associer les termes à volonté et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$R_{2k-1} = \sum_{p=2k}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} = \sum_{p=k}^{+\infty} \left( \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \right).$$

Puisque la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  est décroissante sur  $[e, +\infty[$  et donc sur  $[3, +\infty[$ , pour  $p \geq 2$ ,  $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \geq 0$  et on peut utiliser la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes.

Cherchons déjà un équivalent plus simple de  $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} &= \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p} \left( \ln(2p) + \ln\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{-1} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p} \left( \ln(2p) + \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln p + \ln 2}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln p}{4p^2}. \end{aligned}$$

et donc  $R_{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4} \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^2}$ .

Cherchons maintenant un équivalent simple de  $\frac{\ln p}{p^2}$  de la forme  $v_p - v_{p+1}$ .

Soit  $v_p = \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}$  (suggéré par  $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$ ). Alors

$$\begin{aligned} v_p - v_{p+1} &= \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p} \left( \ln p + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p} \left( \ln p + \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln p}{p^2}. \end{aligned}$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes,  $R_{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4} \sum_{p=k}^{+\infty} \left( \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1} \right) =$

$\frac{\ln k}{4k}$  (série télescopique).

Puis,  $R_{2k} = R_{2k-1} - \frac{\ln(2k)}{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln(2k)}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln k}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ .

En résumé,  $R_{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k}$  et  $R_{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k}$ .

On peut unifier :  $R_{2k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k}$  et  $R_{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k}$  et  $R_{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(2k)}{2(2k)}$ . Finalement,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{2n}.$$

2)  $\sum n^n$  est une série à termes positifs grossièrement divergente.

**1 ère solution.**

$0 < n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n - (n-1)^{n-1}$  car  $\frac{n^n - (n-1)^{n-1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ .

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes,

$$\sum_{p=1}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=2}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p=2}^n (p^p - (p-1)^{p-1}) = n^n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n.$$

(La somme est équivalente à son dernier terme.)

**2 ème solution.** Pour  $n \geq 3$ ,  $0 \leq \frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p \leq \frac{1}{n^n} \times (n-2)(n-2)^{n-2} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$ . Donc  $\frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p$ . On en déduit

que  $\frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^n p^p = 1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-2} p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$ .

$$\sum_{p=1}^n p^p \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n.$$

**n° 22 :** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$ ,  $\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right)$ . Donc pour  $N > p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} &= \frac{1}{2p} \sum_{1 \leq n \leq N, n \neq p} \left( \frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{2p} \left( \sum_{1-p \leq k \leq N-p, k \neq 0} \frac{1}{k} - \sum_{p+1 \leq k \leq N+p, k \neq 2p} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2p} \left( -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2p} \left( \frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Maintenant,  $\sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \dots + \frac{1}{N+p}$  est une somme de  $2p-1$  termes tendant vers 0 quand  $N$  tend vers

$+\infty$ . Puisque  $2p-1$  est constant quand  $N$  varie,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{k} = 0$  et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \times \frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  donné, on a aussi  $\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} = - \sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{p^2 - n^2} = -\frac{3}{4n^2}$  et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit que la suite double  $\left( \frac{1}{n^2 - p^2} \right)_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \neq p}$  n'est pas sommable.

**n° 23 :** La suite  $\left( (-1)^n \frac{1}{3n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général  $(-1)^n \frac{1}{3n+1}$ ,  $n \geq 1$ , converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{3k} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^3)^{n+1}}{1 - (-t^3)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt.$$

Mais  $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt \leq \int_0^1 t^{3n+3} dt = \frac{1}{3n+4}$ . On en déduit que  $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3} dt$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt.$$

Calculons cette dernière intégrale.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1} \right)$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right).$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left[ \ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left( \ln 2 + \sqrt{3} \left( \frac{\pi}{6} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) \right) = \frac{3 \ln 2 + \pi \sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3 \ln 2 + \pi \sqrt{3}}{9}.}$$

**n° 24 :** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $nv_n - (n-1)v_{n-1} = u_n$  ce qui reste vrai pour  $n = 1$  si on pose de plus  $v_0 = 0$ . Par suite, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n^2 - 2u_n v_n = v_n^2 - 2(nv_n - (n-1)v_{n-1})v_n = -(2n-1)v_n^2 + 2(n-1)v_{n-1}v_n$$

$$\leq -(2n-1)v_n^2 + (n-1)(v_{n-1}^2 + v_n^2) = (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2.$$

Mais alors, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{n=1}^N (v_n^2 - 2u_n v_n) \leq \sum_{n=1}^N ((n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2) = -nv_N^2 \leq 0.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq \sum_{n=1}^N 2u_n v_n \leq 2 \left( \sum_{n=1}^N u_n^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de CAUCHY - SCHWARZ}).$$

Si  $\left( \sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} > 0$ , on obtient après simplification par  $\left( \sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2}$  puis élévation au carré

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^N u_n^2,$$

cette inégalité restant claire si  $\left( \sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2} = 0$ . Finalement,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^N u_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général  $v_n^2 (\geq 0)$  est majorée. Donc la série de terme général  $v_n^2$  converge et de plus, quand  $N$  tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

n° 25 : Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Par suite, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = \int_0^1 (-t^2) \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2} dt = - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt.$$

Or  $\left| (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt \leq \int_0^1 t^{2N+2} dt = \frac{1}{2N+3}$ . Comme  $\frac{1}{2N+3}$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $(-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2} dt$ . On en déduit que la série de terme général  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$