

# Planche n° 7. Intégration

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 :** Etudier l'existence des intégrales suivantes

$$\begin{array}{lll}
 1) (**) \int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1}) dx & 2) (**) \int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) dx & 3) (**) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x} dx \\
 4) (***) \int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} dx & 5) (**) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx & 6) (**) \int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx \\
 7) (**) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx & 8) (**) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx & 9) (**) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} dx \\
 10) (**) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx & 11) (**) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx & 12) (***) \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Arccos}(1-x)} dx.
 \end{array}$$

**n° 2 :** Même énoncé.

$$\begin{array}{ll}
 1) (***) \text{ I } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} dx \text{ (Intégrales de BERTRAND)} & 2) (**) \int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx \\
 3) (**) \int_1^{+\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right) dx & 4) (***) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)} dx
 \end{array}$$

**n° 3 :** (Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

$$\begin{array}{lll}
 1) (** \text{ I}) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx & 2) (**) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ (} a > 0 \text{)} & 3) (**) \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx \\
 4) (**) \int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx & 5) (**) \int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx & 6) (***) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x} dx.
 \end{array}$$

**n° 4 :** Existence et calcul de :

$$\begin{array}{ll}
 1) (** \text{ I}) I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx & 2) (\text{très long}) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} dx \\
 3) (** \text{ I}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx & 4) (***) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx \\
 5) (***) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx & 6) (**) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx \\
 7) (**) \int_0^{+\infty} \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} dx & 8) (***) \int_0^{+\infty} \left( 2 + (t+3) \ln \left( \frac{t+2}{t+4} \right) \right) dt \\
 9) (** \text{ I}) \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx & 10) (\text{I très long}) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a} dx \text{ (calcul pour } a \in \left\{ \frac{3}{2}, 2, 3 \right\} \text{)} \\
 11) (***) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx & 12) (***) \text{ I } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \text{ (} 0 < a < b \text{)}
 \end{array}$$

**n° 5 :** Deux calculs de  $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ .

1) (\*\* I) En utilisant  $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ , calculer I (et J).

2) (\*\*\*) I Calculer  $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$  (commencer par  $P_n^2$ ) et en déduire I.

n° 6 (\*\* I) : En utilisant un développement de  $\frac{1}{1-t}$ , calculer  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ .

n° 7 (\*\*\*) I) : Calculer  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$  (en écrivant  $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$ ).

n° 8 : 1) (\*\* I) Trouver un équivalent simple quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

2) (\*\*\*) Montrer que  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a$ .

3) (\*) Montrer que  $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$ .

n° 9 (\*\*\*) : Etude complète de  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ .

n° 10 (\*\*\*) : (Hors programme) Convergence et calcul de  $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$ .

n° 11 (\*\*\*) : Soit  $f$  définie, continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$ , intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

1) Montrer que  $xf(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2) Existence et calcul de  $\int_1^{+\infty} x(f(x+1) - f(x)) dx$ .

n° 12 (\*\*\*) : 1) Soit  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge en  $+\infty$ . Montrer que  $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$  converge en  $+\infty$  si et seulement si  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2) a) On suppose que  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f''$  admettent des limites réelles quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $f'$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) En déduire que si les intégrales  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  et  $\int_0^{+\infty} f''(x) dx$  convergent alors  $f$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

n° 13 (\*\*\*) : Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f^2$  et  $(f'')^2$  soient intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f'^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx \right)$ . Cas d'égalité ?