Planche n^o 7. Intégration sur un intervalle quelconque. Corrigé

n^o 1 : 1) Pour $x \geqslant 0$, $x^2+4x+1 \geqslant 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1} = \dfrac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim 32x$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n ?est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.

2) Pour $x \geqslant 1$, $1+\dfrac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f : x \mapsto e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})} = e-\dfrac{e}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

3) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+e^x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

• En 0, $\dfrac{\ln x}{x+e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\dfrac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\ln x}{e^x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Comme $2 > 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

4) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $f : x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{1}{3}\ln x+\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right) = \dfrac{1}{3}\ln x+\ln\left(\dfrac{1}{3x}+O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -\dfrac{2}{3}\ln x-\ln 3+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+o(1)$.

Mais alors $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+2\ln x+o(1)\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2f(x) = 0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

5) La fonction $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x) = \exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right) = \exp(-x+o(x))$ et donc $x^2f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

6) La fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.

• Quand x tend vers $+\infty$, $x^2f(x) = \exp\left(-\ln^2 x+2\ln x\right) \to 0$. Donc f est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

7) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \dfrac{5x-3x}{x^5/3} = \dfrac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\dfrac{2}{3} < 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.

• En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\dfrac{5}{3} > 1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

8) La fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

• En 0, $f(x)\sim -\ln x = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• En 1, $f(x)\sim \dfrac{\ln x}{2(x-1)}\sim \dfrac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.

• En $+\infty$, $x^{3/2}f(x)\sim \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

9) La fonctionf $:\ x\mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ puis par parité sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut par parité $2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

10) La fonctionf $:\ x\mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $]-1,1[$.

11) La fonctionf $:\ x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\dfrac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0,1[$.

12) La fonctionf $:\ x\mapsto \dfrac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

En 0, $\mathrm{Arccos}(1-x)=o(1)$. Donc $\mathrm{Arccos}(1-x)\sim \sin\left(\mathrm{Arccos}(1-x)\right)=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}\sim\sqrt{2}\sqrt{x}$.

Donc $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0,1[$.

n° 2 : 1) Pour tout couple de réels (a,b), la fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{1}{x^a\ln^b x}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a>1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\dfrac{1}{x^{(a-1)/2}\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ car $\dfrac{a-1}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\dfrac{a+1}{2}>1$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

2ème cas. Si $a<1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\dfrac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$ car $\dfrac{1-a}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\dfrac{a+1}{2}<1$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.

3ème cas. Si $a=1$. Pour $X>2$ fixé , en posant $t=\ln x$ et donc $dt=\dfrac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X\frac{1}{x\ln^b}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln X}\frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $b>1$.

En résumé ,

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x} \text{ est intégrable sur } [2, +\infty[\text{ si et seulement si } a > 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b > 1).}$$

(En particulier, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$).

2) Pour tout réel a, la fonction $f\ :\ x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

• **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

• **Etude en $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a < 1$.

En résumé, f est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1 < a < 1$.

3) Pour $x \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f\ :\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1 + \frac{1}{x}} - a - \dfrac{b}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} (1 - a) + \frac{1 - b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a \neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1 - b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = b = 1$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a = b = 1$.

4) Pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^a(1 + x^b)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• **Etude en 0.**

-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

• **Etude en $+\infty$.**

-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$,

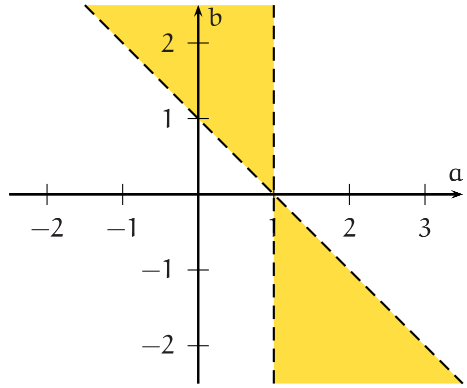
-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $((b \geqslant 0$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a + b < 1))$ et $((b > 0$ et $a + b > 1)$ ou $(b \leqslant 0$ et $a > 1))$ ce qui équivaut à $(b > 0$ et $a + b > 1$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a > 1$ et $a + b < 1)$.

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.



n° 3 : **1)** Soient ε et X deux réels tels que $0 < \varepsilon < X$. Les deux fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{X} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_1^X + \int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.

• $\left|\dfrac{1-\cos X}{X}\right| \leqslant \dfrac{1}{X}$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1-\cos X}{X} = 0$.

• $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon} \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge et de plus } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.}$$

2) Soit $a > 0$. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Sur $]0,1]$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge en 0 si et seulement si $a-1 < 1$ ou encore $a < 2$. On suppose dorénavant $a < 2$.

• Soit $X > 1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx.$$

Maintenant, $\left|\dfrac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{a+1}}$, et puique $a+1 > 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\dfrac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\boxed{\forall a > 0,\ \text{l'intégrale} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\ dx \text{ converge si et seulement si } a < 2.}$$

3) Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2}\ dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\ dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\ dt\right)$$

Maintenant, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left|\dfrac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left|\dfrac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\ dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{\text{l'intégrale} \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\ dx \text{ converge.}}$$

On en déduit encore que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\ dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de Fresnel).

4) La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3\sin(x^8)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3\sin(x^8)dx = \frac{1}{4}\int_0^{X^4} \sin(t^2)\ dt = \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\int_0^{X^4} e^{it^2}\ dt\right).$$

D'après 3), $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ dt$ est une intégrale convergente et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\ dx$ converge.

5) La fonction $f\ :\ x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

$$\int_0^X \cos(e^x)\ dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t}\ dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\ dx$ converge .

5) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $1 + x^3\sin^2 x \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^3\sin^2 x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0, +\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + x^3\sin^2 x}\ dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \geqslant 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + x^3\sin^2 x}\ dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (u + n\pi)^3\sin^2 u}\ du \\
&\leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + n^3\pi^3\sin^2}\ du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + n^3\pi^3\sin^2 u}\ du \\
&\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + n^3\pi^3\left(\dfrac{2u}{\pi}\right)^2}\ du \text{ (par concavité de la fonction sinus sur } [0, \pi]) \\
&= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{(n\pi)^{3/2}} \frac{1}{1 + v^2}\ dv \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + v^2}\ dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^3\sin^2 x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

n° 4 : 1) I_n existe si et seulement si $n \geqslant 1$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in]0, +\infty[$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^X + 2n\int_0^X \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n\int_0^X \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt$$
$$= \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt - 2n\int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt.$$

Puisque les fonctions considérées sont toutes intégrables sur $[0, +\infty[$, quand X tend vers $+\infty$ on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

En tenant compte de $I_1 = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_1 = \frac{((2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

Remarque. En posant $t = \tan x$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 x)^n} \times (1+\tan^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)^{n-1}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u\,du$ (intégrales de Wallis).

2) On pose $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$.
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{x^7}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}$ est donc intégrable sur $[2, +\infty[$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$. $X^4+1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X + e^{i\pi/4})(X + e^{-i\pi/4})$ et la décomposition en éléments simples de f sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$f = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{\overline{b}}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{c}{X + e^{i\pi/4}} + \frac{\overline{c}}{X + e^{-i\pi/4}}.$$

- $a_3 = \lim_{x\to 1} (x-1)^3 f(x) = \frac{1}{1^4+1} = \frac{1}{2}$ puis

$$f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} - \frac{1}{2(x-1)^3} = \frac{1-x^4}{2(x-1)^3(x^4+1)} = -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)}$$

- $a_2 = \lim_{x\to 1} -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} \times (x-1)^2 = -1$ puis

$$f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-(x^3+x^2+x+1)+2(x^4+1)}{2(x-1)^2(x^4+1)}$$
$$= \frac{2x^4-x^3-x^2-x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} = \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)}$$

- $a_1 = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)} \times (x-1) = \frac{1}{2}$ puis

$$f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{(2x^3+x^2-1)-(x^4+1)}{2(x-1)(x^4+1)}$$
$$= \frac{-x^4+2x^3+x^2-2}{2(x-1)(x^4+1)} = \frac{-x^3+x^2+2x+2}{2(x^4+1)}.$$

- Posons $\alpha = e^{i\pi/4}$. On a $\alpha^4 = -1$ et aussi

$$\frac{-X^3+X^2+2X+2}{2(X^4+1)}=\frac{b}{X-\alpha}+\frac{\overline{b}}{X-\overline{\alpha}}+\frac{c}{X+\alpha}+\frac{\overline{c}}{X+\overline{\alpha}}$$

$b=\dfrac{-\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+2}{2\times 4\alpha^3}=\dfrac{-\alpha^4+\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha}{2\times 4\alpha^4}=-\dfrac{1+\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha}{8}$ puis en tenant compte de $\alpha\overline{\alpha}=1$,

$$\begin{aligned}
\frac{b}{X-\alpha}+\frac{\overline{b}}{X-\overline{\alpha}}&=\frac{1}{8}\left(-\frac{\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+1}{X-\alpha}-\frac{\overline{\alpha}^3+2\overline{\alpha}^2+2\overline{\alpha}+1}{X-\overline{\alpha}}\right)\\
&=\frac{-X(2+\sqrt{2})+4+3\sqrt{2}}{8(X^2-X\sqrt{2}+1)}=-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\times\frac{2X-\dfrac{2(4+3\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}}{X^2-X\sqrt{2}+1}\\
&=-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\times\frac{2X-(4+3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{X^2-X\sqrt{2}+1}=-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\times\frac{2X-2-2\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}\\
&=-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{2+\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}\right).
\end{aligned}$$

En remplaçant $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{2}$, on obtient

$$\frac{c}{X+\alpha}+\frac{\overline{c}}{X+\overline{\alpha}}=\frac{-2+\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}-\frac{2-\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

En résumé, pour tout $x\in[2,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f(x)=&\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{2+\sqrt{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\\
&+\frac{-2+\sqrt{2}}{16}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{2-\sqrt{2}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

Primitive de f. Une primitive de f sur $[2,+\infty[$ est la fonction F telle que $\forall x\in[2,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
F(x)&=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{(2+\sqrt{2})^2\sqrt{2}}{16}\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}-1)\\
&+\frac{-2+\sqrt{2}}{16}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{(2-\sqrt{2})^2\sqrt{2}}{16}\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}+1)\\
&=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{2+\sqrt{2}}{16}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{4+3\sqrt{2}}{8}\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}-1)\\
&+\frac{-2+\sqrt{2}}{16}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{-4+3\sqrt{2}}{8}\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

Pour la limite en $+\infty$, on regroupe d'une part

$$\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{8}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{(x-1)^4}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\right)$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et d'autre part

$$-\frac{\sqrt{2}}{16}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)=\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On obtient

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{(4+3\sqrt{2})+(-4+3\sqrt{2})}{8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8},$$

et on trouve

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(2) \\ &= \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{16}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - \frac{4+3\sqrt{2}}{8}\mathrm{Arctan}(2\sqrt{2}-1) + \frac{4-3\sqrt{2}}{8}\mathrm{Arctan}(2\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

3) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$ fournit $I = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{t^3}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^n}$. Par suite, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $n \geqslant 2$.

Soit $n \geqslant 2$. La décomposition en éléments simples de f s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x+k},$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lim_{x\to-k}(x+k)f(x) = \frac{1}{(-k+1)\ldots(-k+(k-1))(-k+(k+1))\ldots(-k+n)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= (-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{n!}. \end{aligned}$$

Une primitive de f est donc la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k\ln(x+k)$.

Quand x tend vers $+\infty$, $F(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\ln x + o(1)$. Cette expression a une limite réelle si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 0$.

Puisque f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on a donc nécessairement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 0$ puis $F(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Il reste

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,dx = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k\ln(k).$$

5) • Si $a = 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue et intégrable sur $[0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$.

• Si $a \neq 0$, $-\dfrac{1}{a}$ est dans $[0,1[$ si et seulement si $a < -1$. Dans ce cas, le segment $[0,1[$ contient un intervalle ouvert sur lequel $(1-x)(1+ax) < 0$ et l'intégrale proposée n'existe pas.

• Si $a \geqslant -1$, puisque $(1-x)(1+ax)$ est strictement positif sur un voisinage à droite de 0 et que $-\dfrac{1}{a}$ n'est pas dans $[0,1[$, $(1-x)(1+ax) > 0$ pour $x \in [0,1[$. Dans ce cas, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}$ est continue et positive sur $[0,1[$.
Si $a > -1$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et dans ce cas, la fonction f est intégrable sur un voisinage de 1.
Si $a = -1$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} = \dfrac{1}{1-x}$ et dans ce cas, la fonction f n'est pas intégrable sur un voisinage de 1.

En résumé, la fonction f est intégrable sur $[0,1[$ si et seulement si $a > -1$.

Calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ **pour** $a > -1$ **et** $a \neq 0$**.**
Pour $x \in [0,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} = \dfrac{1}{1-x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+ax}}$. On pose $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+ax}}$ et donc $x = \dfrac{-u^2+1}{au^2+1}$ et $dx = \dfrac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2}\,du$.
On obtient

$$\mathrm{I} = \int_1^0 u \times \frac{1}{1 - \dfrac{-u^2+1}{au^2+1}} \times \frac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2}\,du = 2\int_0^1 \frac{1}{au^2+1}\,du.$$

Donc, si $a > 0$, $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(u\sqrt{a})\right]_0^1 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{a})$ et si $-1 < a < 0$, $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{argth}(u\sqrt{-a})\right]_0^1 = \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{argth}(\sqrt{-a})$.

$$\boxed{\forall a > -1,\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{argth}(\sqrt{-a}) \text{ si } -1 < a < 0\\ 2 \text{ si } a = 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{a}) \text{ si } a > 0\end{array}\right.}.$$

6) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente au voisinage de $+\infty$ à e^{-x}. La fonction f est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $u = e^x$ et donc $x = \ln u$ puis $dx = \dfrac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+u)\left(1+\dfrac{1}{u}\right)}\,\frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\,du = \frac{1}{2}$$

7) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ car pour tout $x \geqslant 0$, $5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4 \geqslant 4 > 0$.
En $+\infty$, $\dfrac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4} \sim e^{-x}$ et donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On pose $u = e^x$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\dfrac{5}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right) + \dfrac{3}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right) + 4}\,\frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4u^2+4u+1}\,du\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2u+1)^2}\,du = \left[-\frac{1}{2(2u+1)}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

8) La fonction $f\ :\ t\mapsto 2+(t+3)\ln\left(\dfrac{t+2}{t+4}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de signe constant au voisinage de $+\infty$. L'intégrabilité de f équivaut donc à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ pour la fonction $F\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^x\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)\,dt$.

Soit $x>0$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
F(x)-2x&=\int_0^x(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\,dt=\left[\frac{(t+3)^2}{2}\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right]_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x(t+3)^2\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)\,dt\\
&=\frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-\int_0^x\frac{(t+3)^2}{(t+2)(t+4)}\,dt\\
&=\frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-\int_0^x\left(1+\frac{1}{2(t+2)}-\frac{1}{2(t+4)}\right)\,dt\\
&=\frac{(x+3)^2}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+\frac{9}{2}\ln 2-x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)-\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall x>0,\ F(x)=x+\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)+4\ln 2.$$

Maintenant quand x tend vers $+\infty$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=\frac{2}{x}-\frac{4}{x}-\frac{2x^2}{+}\frac{8}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\ln\left(\frac{x+2}{x+4}\right)=\frac{1}{2}(x^2+6x+8)\left(-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-x-3+o(1)$$

et finalement $F(x)\underset{x\to+\infty}{=}=4\ln 2-3+o(1)$. Ceci montre l'intégrabilité de la fonction f sur $[0,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)\,dt=4\ln 2-3.}$$

9) La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\pi}{2x^3}$ et donc est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Posons alors $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

1er calcul. On pose $u=\dfrac{1}{x}$ et on obtient

$$I=\int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{u}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\,\frac{-du}{u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,u\right)}{(u^2+1)^2}\,du=-I+\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u}{(u^2+1)^2}\,du$$

et donc $2I=\dfrac{\pi}{2}\left[-\dfrac{1}{2(1+u^2)}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{4}$ ce qui fournit

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{8}.}$$

2ème calcul. Soit $X>0$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^X\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{Arctan}\,x\right]_0^X+\frac{1}{2}\int_0^X\frac{1}{x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2(X^2+1)}\,\mathrm{Arctan}\,X+\frac{1}{2}\int_0^X\frac{1}{x^2+1)^2}\,dx$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

et quand X tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\text{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1)^2}\,dx$. On pose alors $x=\tan t$ et on obtient

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,dt=\frac{\pi}{8}.$$

10) Soit $a\in\mathbb{R}$. La fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prologeable par continuité en 0 et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\ln x}{x^{2a-1}}$. Cette dernière expression est elle-même négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ pour les trois valeurs de a envisagées. La fonction f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ quand $a\in\left\{\dfrac{3}{2},2,3\right\}$. On pose alors $I_a=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$.

Calcul quand $a=2$. On pose $u=\dfrac{1}{x}$. On obtient $I_2=\displaystyle\int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\frac{-du}{u^2}=-I_2$ et donc $I_2=0$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx=0.}$$

Calcul quand $a=3$. Une intégration par parties fournit

$$\int\frac{x\ln x}{(x^2+1)^3}\,dx=-\frac{1}{4}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x(1+x^2)^2}dx$$

puis en posant $u=x^2$,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x(1+x^2)^2}\,dx&=\int\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u(u+1)^2}\,du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}\right)du\\&=\frac{1}{2}\left(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}\right)+C=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2)-\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)+C\end{aligned}$$

Finalement, une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^3}$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction $F\ :\ x\mapsto-\dfrac{1}{4}\dfrac{\ln x}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{x^2+1}$. Quand x tend vers $+\infty$, $F(x)$ tend vers 0. Pour trouver la limite de F en 0, on écrit

$$F(x)=\frac{1}{8}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\ln x=\frac{1}{8}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{x+2}{4(x+1)^2}x\ln x$$

et donc $F(x)$ tend vers $\dfrac{1}{8}$ quand x tend vers 0. Ainsi, $I_3=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-\lim\limits_{x\to0}F(x)=-\dfrac{1}{8}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^3}\,dx=-\frac{1}{8}.}$$

Calcul quand $a=\dfrac{3}{2}$. Une intégration par parties fournit

$$\int\frac{x\ln x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ln x+\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ln x+\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

En posant $u=x^2$, on obtient $\displaystyle\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{u+1}}\,du$ puis en posant $v=\sqrt{u+1}=\sqrt{x^2+1}>1$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{u+1}}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{v(v^2-1)}\,2dv=\int\frac{1}{v^2-1}\,dv=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v-1}{v+1}\right)+C.$$

Une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$ est donc la fonction $F\ :\ x\mapsto-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)$.

Déjà, $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Pour la limite en 0, on écrit

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=\ln\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}\right)=2\ln x-2\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right),$$

et donc

$$F(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\ln x-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}x\ln x-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

On en déduit que $F(x)$ tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers 0 et donc que $I_{3/2}=\ln 2$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx=\ln 2.}$$

11) La fonction $f\ :\ x\mapsto\sqrt{\tan x}$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
En $\frac{\pi}{2}$ à gauche, $0<\sqrt{\tan x}=\frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche. Finalement, la fonction f est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On peut noter $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$.

On pose $u=\sqrt{\tan x}$ et donc $\tan x=u^2$ puis $(1+\tan^2 x)\,dx=2udu$ et donc $dx=\frac{2u\,du}{1+u^4}$. On obtient $I=\int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{1+u^4}du$.
Or $u^4+1=u^4+2u^2+1-2u^2=(u^2+1-u\sqrt{2})(u^2+1+u\sqrt{2})$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{1+u^4}&=\frac{u^2}{(u^2+u\sqrt{2}+1)(u^2-u\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-u\sqrt{2}+1}-\frac{u}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

Par suite, une primitive de la fonction $u\mapsto\frac{2u^2}{u^4+1}$ sur $[0,+\infty[$ est la fonction

$$F\ :\ u\mapsto\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-u\sqrt{2}+1}{u^2+u\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Arctan}(u\sqrt{2}-1)+\mathrm{Arctan}(u\sqrt{2}+1)\right)$$

On en déduit que $I=\lim\limits_{u\to+\infty}F(u)-F(0)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.}$$

12) La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $f(t)\underset{t\to0}{=}b-a+o(1)$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. Chacune des deux fonctions $t\mapsto\frac{e^{-at}}{t}$ et $t\mapsto\frac{e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ et on peut écrire

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-bt}}{t}\,dt.$$

En posant $u=at$ et donc $\frac{du}{u}=\frac{dt}{t}$, on obtient $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}\,dt=\int_{ax}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$ et de même $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-bt}}{t}\,dt=\int_{bx}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$ et donc

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-u}}{u}du.$$

Maintenant, pour $x>0$, l'encadrement $e^{-bx}\int_{ax}^{bx}\frac{1}{u}\,du\leqslant\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-u}}{u}du\leqslant e^{-ax}\int_{ax}^{bx}\frac{1}{u}\,du$ fournit

$$e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\leqslant\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-u}}{u}\,du\leqslant e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim\limits_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-u}}{u}\,du=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } 0<a<b,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\ln\left(\frac{b}{a}\right).}$$

n° 5 : La fonction $f\ :\ x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x)\sim\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Soient $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$. Le changement de variables $x=\frac{\pi}{2}-t$ fournit J existe et $J=I$. Par suite,

$$\begin{aligned}2I=I+J&=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2x))\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du\\&=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{0}\ln(\sin(\pi-t))\,(-dt)\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+I.\end{aligned}$$

Par suite, $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

2) Pour $n\geqslant 2$, posons $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ et donc $P_n>0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n}=1$. On en déduit que

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$\begin{aligned}P_n^2&=\prod_{k=1}^{2n-1}\frac{e^{ik\pi/(2n)}-e^{-ik\pi/(2n)}}{2i}=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)\\&=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(e^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=\frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$-èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1}=1+X+X^2+\ldots+X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n=\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, posons alors $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=\frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.
Puisque la fonction $x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_k))\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx$ puis en sommant ces inégalités , on obtient

$$\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)\leqslant\int_{\pi/(2n)}^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$$

De même, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n\geqslant 2$, $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)+\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx\leqslant I\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n)=\ln n-(n-1)\ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi\ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x\ :\mapsto\ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

n° 6 : La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0;1[$.
1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1}=\frac{-\ln t}{1-t}=-\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t+\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$$

Pour $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(t)=-t^n\ln t$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Chaque fonction f_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t\mapsto\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}=\frac{\ln t}{t-1}+\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t$ et

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k\ln t\,dt+\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt$$

• La fonction $g\ :\ t\mapsto\frac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0,1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt\right|\leqslant\int_0^1 t^n|g(t)|\,dt\leqslant M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt=0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k\ln t\,dt$ converge et que

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-t^k\ln t)\,dt.$$

• Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_{\varepsilon}^{1} (-t^k \ln t)\ dt = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_{\varepsilon}^{1} + \frac{1}{k+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^k\ dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} (-t^k \ln t)\ dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\ dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0,1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ dt = \frac{\pi^2}{6}$.

n° 7 : La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0,x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\ dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\ dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\ dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = t^2$ et on obtient $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\ dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\ dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\ du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\ dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t}\ dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\ dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\ dt.$$

On note alors que, puisque $x \in]0,1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t\ln t < 0$ et donc $\dfrac{x}{t\ln t} \leqslant \dfrac{t}{t\ln t} = \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{x^2}{\ln}t$ puis par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{x}{t\ln t}\ dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\ dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t\ln t}\ dt$ et donc

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\ dtx \leqslant x \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt$$

Maintenant, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0,1[$,

$$x^2 \ln 2 \leqslant \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\ dt \leqslant x\ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\ dt = \ln 2.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

n° 8 : 1) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2} \sim \left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{-t^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right)'\,dt = \frac{1}{2x}e^{-x^2},$$

et donc

$$\boxed{e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

2) Pour $a>0$ fixé, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice n° 3)) puis

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx &= -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+O(1)\\ &\underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{1}{x}\,dx+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1) \underset{a\to0}{=} -\ln a+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1).\end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{1-\cos x}{x}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x}{2}$ et en particulier, $\dfrac{1-\cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ et en particulier, $\displaystyle\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\ln a+O(1)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{\sim} -\ln a.}$$

3) Soit $a>0$.

$$\left|\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx-\frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1\frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

n° 9 : • Domaine de définition. Soit $x\in\mathbb{R}$.
Si $x<0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x,0[\subset[x,x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.
Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$.
Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Donc la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.
Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ et strictement positive sur } D.}$$

• Dérivabilité. Soit I l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur I. Soit F une primitive de cette fonction sur I.

Si $x\in]0,1[$, on a $[x^2,x]\subset]0,1[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$. De même, si $x\in]1,+\infty[$.
On en déduit que f est de classe C^1 sur D. De plus, pour $x\in D$,

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).

• **Etude en 0.** Soit $x \in]0,1[$. On a $0 < x^2 < x < 1$ et de plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2, x] \subset]0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0,1[$. Donc, $\dfrac{x-x^2}{\ln x} \leqslant \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \dfrac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0,1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0,1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(0) = 0$.

• **Etude en 1.** On a vu au n° 7 que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).
Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1) = 1$.
En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• **Etude en** $+\infty$**.** Pour $x > 1$, $f(x) \geqslant x^2 - x\ln x$. Donc $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

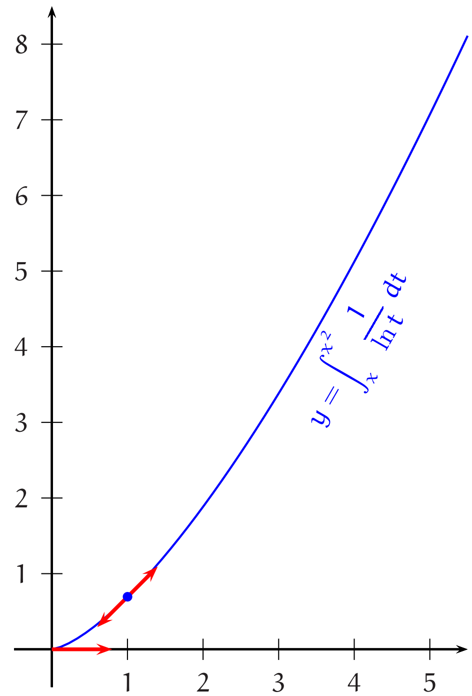
• **Convexité.** Pour $x \in D$, $f''(x) = \dfrac{\ln x - \dfrac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.
En 1, en posant $x = 1 + h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - h}{h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(1) = \dfrac{1}{2}$.
Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. La fonction g est stictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

• **Graphe.**



n° 10 : La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Soient X un réel élément de $[2, +\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx.$$

Or, $\left|\displaystyle\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx\right| \leqslant \dfrac{X-n}{n} \leqslant \dfrac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = 0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, $k \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\displaystyle\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).\end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{4n}}\times\frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4}\times(2n)=\frac{2}{\pi}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

n° 11 : 1) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, pour $x\geqslant 2$ on a

$$0\leqslant xf(x)=2\left(x-\frac{x}{2}\right)f(x)\leqslant 2\int_{x/2}^{x}f(t)\,dt=2\left(/\mathrm{dint}x/2{+}\infty f(t)\,dt-\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) La fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Soit $X\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx&=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}(x-1)f(x)\,dx=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx\\&=\int_1^2 xf(x)\,dx-\int_X^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Maintenant $0\leqslant\displaystyle\int_X^{X+1}xf(x)\,dx\leqslant(X+1-X)(X+1)f(X)\leqslant 2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ tend vers $\displaystyle\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$.

Puisque la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, on sait que $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la fonction $X\mapsto\displaystyle\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_1^{+\infty}x(f(x)-f(x+1))\,dx=\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_2^{+\infty}f(x)\,dx.}$$

n° 12 : 1) Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $x\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.
Si de plus l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge, il est exclus d'avoir $\ell\neq 0$ et réciproquement si $\ell=0$ alors $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2) a) Soit $x\geqslant 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe un réel $\theta_x\in]x,x+1[$

$$f(x+1)=f(x)+(x+1-x)f'(x)+\frac{1}{2}f''(\theta_x).$$

ce qui s'écrit encore $f'(x)=f(x+1)-f(x)-\dfrac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1)-f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}f''(x)$.

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

Ensuite, puisque pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0)$ et $\int_0^x f''(t)\, dt = f'(x) - f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)\, dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ $(= \lim_{x\to+\infty} f''(x))$.

b) Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$. F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ et $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\, dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)\, dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

n° 13 : L'inégalité $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leqslant Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x)\, dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\, dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x)\, dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff'.

Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisament grand, $f(x)f'(x) \geqslant 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.
De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.
Si cette limite est un réel non nul ℓ, supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisament grand, on a $f(x)f'(x) \geqslant \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2. Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\, dx$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\, dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\, dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.
Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.
Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.