

# Planche n° 8. Suites et séries de fonctions

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 :** Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

$$1) (**) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad 2) (**) f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad 3) (**) f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

$$\mathbf{n^\circ 2 (** I) :} \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}.$$

1) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x}$ .

2) A l'aide de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , calculer l'intégrale de GAUSS  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**n° 3 (\*\* I) :** (Polynômes de BERNSTEIN. Théorème de WEIERSTRASS).

1) Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $n$  entier naturel non nul, on définit le  $n$ -ème polynôme de BERNSTEIN associé à  $f$  par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

a) Calculer  $B_n(f)$  quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto 1$ , quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto x$ , quand  $f$  est la fonction  $x \mapsto x(x-1)$ .

b) En déduire que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$ .

2) En séparant les entiers  $k$  tels que  $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$  et les entiers  $k$  tels que  $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha$  ( $\alpha > 0$  donné), montrer que la suite de polynômes  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

3) Montrer le théorème de WEIERSTRASS : soit  $f$  une application continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de polynômes.

**n° 4 (\*\* I) :** Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ . Montrer que  $f$  est un polynôme.

$$\mathbf{n^\circ 5 (**) :} \text{ Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ .

2) Calculer  $f'(x)$  et en déduire que  $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$ .

$$\mathbf{n^\circ 6 (**) :} \text{ Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}.$$

1) Domaine de définition de  $f$ . On étudie ensuite  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .

2) Continuité de  $f$  et limites de  $f$  en  $1$  et  $+\infty$ .

3) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et dresser son tableau de variation.

**n° 7 (\*\*) :** Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

$$1) f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \quad 2) f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad 3) f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

**n° 8 (\*\* I) :** Montrer que pour tout réel  $a > 0$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$ .

**n° 9 (\*\*) :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n(t) = (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \right)$ .

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général  $f_n$  puis la continuité de la somme  $f$ .

2) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ln \left( \frac{2}{\pi} \right)$  à l'aide de la formule de STIRLING.

**n° 10 (\*\*) :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$ .

Etude complète de  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  : domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que  $f$  n'est pas dérivable en 0), allure du graphe .

**n° 11 (\*\*) :** Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ . Trouver un équivalent simple de  $f$  en 0 à droite.

**n° 12 (\*\*\*) :** Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ . Trouver un équivalent simple de  $f$  en 1 .