

# Planche n° 9. Suites et séries d'intégrales

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\* I) :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$ .

1) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x^2}$ .

2) A l'aide de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , calculer l'intégrale de GAUSS  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**n° 2 (\*\*) :** Montrer que  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$  et  $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ .

**n° 3 (\*\*) :** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

**n° 4 (\*\*) :** Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$  en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

**n° 5 (\*\*) :** Calculer  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ .

**n° 6 (\*\*) :** 1) Montrer que pour  $x$  réel de  $[0, 1[$ ,  $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

2) Montrer que  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

**n° 7 (\*\*\*) I) :** Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$