

Planche n° 10. Séries entières

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{llll}
 1) \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n & 2) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n z^n & 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(n!))^2 z^n & 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right) \right)^{n^4} z^n \\
 5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n & 6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n & 7) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} z^n, (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 &
 \end{array}$$

n° 2 : Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

$$\begin{array}{llll}
 1) (**) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n & 2) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n & 3) (** I) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} & 4) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n \\
 5) (*) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} & 6) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n) x^n & 7) (** I) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n & 8) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n \\
 9) (** I) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n & 10) (*) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n} & 11) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1) 2^{n+1} x^n & 12) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \\
 13) (***) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } a_0 = a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & & & \\
 14) (**) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } a_n \text{ est le nombre de couples } (x, y) \text{ d'entiers naturels tels que } x + 5y = n. & & &
 \end{array}$$

n° 3 : Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) (*) \frac{1}{(x-1)(x-2)} & 2) (***) I) \frac{1}{x^2-2tx+1}, t \in \mathbb{R} & 3) (*) \ln(x^2-5x+6) \\
 4) (**) \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin a}{1-x \cos a} \right), a \in]0, \pi[& 5) (**) \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-p)} & 6) (***) I) (\operatorname{Arcsin} x)^2 \\
 7) (*) \int_0^x \cos(t^2) dt & 8) (***) I) \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t^4+t^2+1} & 9) (**) \cos x \operatorname{ch} x.
 \end{array}$$

n° 4 (* I) : Pour x réel, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

n° 5 (*) I)** : Soient $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donné. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R .

n° 6 (**)** : (Inverse d'une série entière)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$ (ou plus généralement $a_0 \neq 0$).

1) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.

2) Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.

n° 7 (*) I)** : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

n° 8 (*) :** Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ pour x dans $] -1, 1[$.

n° 9 (*) I :** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$ pour x dans $] -1, 1[$ et en déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

n° 10 (**) :** Pour n entier naturel, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1}$. Convergence et somme de la série (numérique) de terme général u_n .

n° 11 (*) :** Soit A une matrice carrée complexe de format $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme en fonction de χ_A de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Tr}(A^n) z^n$.

n° 12 (*) :** Pour x réel, on pose $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

n° 13 () :** On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puis pour tout entier naturel n , $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$. Rayons et sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.

n° 14 (*) I :** Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} x^n$.

n° 15 (*) I :** 1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une limite réelle k . (En particulier $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ et $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$). On suppose de plus que la série entière associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un rayon de convergence égal à 1 et que la série de terme général a_n diverge.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.

2) **Applications.** a) Equivalent simple quand x tend vers 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln nx^n$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul donné.

n° 16 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour x réel on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel p et tout réel positif x , $|f^{(p)}(x)| \leq 1$. Déterminer f .

n° 17 (**) I :** (Développement en série entière de la fonction $x \mapsto \tan x$) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan x$.

1) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n , $f^{(n)} = P_n \circ f$ et que les P_n sont à coefficients entiers naturels. (Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$).

2) En utilisant la formule de TAYLOR-LAPLACE, montrer que la série de TAYLOR à l'origine de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

3) On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. En déduire que pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 $f(x) = g(x)$ et que $R = \frac{\pi}{2}$.

4) Calculer $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$.

5) Vérifier que la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est développable en série entière. Préciser le rayon et la valeur des coefficients en fonction des a_n .

n° 18 (***) : Développer en série entière $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$ et en déduire que pour tout réel x , $F(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4} dt$.

n° 19 (***) : Soit I_n le nombre d'involutions de $[[1, n]]$. Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

n° 20 (***) I : (Dénombrement de parenthésages)

1) Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne et a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E ($(a_0 = 0), a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 5, \dots$). Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

2) Soit f la série entière associée à la suite (a_n) . On suppose momentanément le rayon R de cette série strictement positif. Montrer que pour tout x de $]-R, R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.

3) Calculer R et f .

4) En déduire a_n .