# Planche n° 11. Intégrales dépendant d'un paramètre

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**n° 1 (**) :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}$.

**1)** Calculer la dérivée de la fonction $I_n$ sur $]0, +\infty[$.

**2)** En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3}\ dt$.

**n° 2 (*** I) (très long) :** (Intégrale de Poisson) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\ d\theta$.

**1) a)** Montrer que $F$ est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.
**b)** Calculer $F'(x)$.
**c)** Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (F(x) - 4\pi \ln x)$.
**d)** En déduire $F(x)$ pour tout réel $x$.

**2) a)** Quand $x \in ]-1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de $\theta$).

**b)** Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x)$ pour tout réel $x$.

**n° 3 (** I) :** (Un calcul de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\ dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\ dt\right)^2$.

**1)** Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $F'$.
**2)** Montrer que $G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $G'$.
**3)** Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
**4)** Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
**5)** En déduire I.

**n° 4 (***) :** Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)\ dt$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

**n° 5 (***) :** Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\ dt$.

**n° 6 (**** I) (très long) :** Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x + t}\ dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

**n° 7 (** I) :** (Produit de convolution) **1)** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et $T$-périodiques ($T$ réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(x - t)g(t)\ dt.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et $T$-périodique.

**2)** $*$ est donc une loi interne sur $E$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et $T$-périodiques. Montrer que cette loi est commutative et associative.

© Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés. 