# Planche n° 12. Espaces préhilbertiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**n° 1 (*** I) :** (Polynômes de Legendre) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit $E$ du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

**1)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
  **a)** Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |\ )$.
  **b)** Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
**2)** Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de $E$.

**n° 2 (*** I) :** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

**1)** Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
**2)** **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de $h_n$. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$.
  **b)** Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, \varphi)$.
  **c)** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien $(E, \varphi)$.

**n° 3 (** I) :** (polynômes de Tchebychev) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n$ le $n$-ème polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

**1)** Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
**2)** **a)** Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, \varphi)$.
  **b)** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

**n° 4 (** I) :** On note $E$ l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

**1)** Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
**2)** Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

**n° 5 (* I) :** Soit $\Phi$ l'application qui à deux matrices carrées réelles $A$ et $B$ de format $n$ associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que $\Phi$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ?

**n° 6 (****) :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

**n° 7 (**) :** Soit $E$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de $n$ vecteurs unitaires de $E$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur $x$ de $E$, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de $E$.

**n° 8 (***) :** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour $P$ et $Q$ polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \int_{0}^{1} f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

**1)** Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
**2)** Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\Phi$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $\deg(P_n) = n$.
**3)** Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme $P_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, a $n$ racines réelles simples.

**n° 9 (*** I) :** (Matrices et déterminants de GRAM) Soit $E$ un espace préhilbertien réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans $E^n$, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de GRAM).

**1)** Montrer que $\text{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \text{rg}(x_1, ..., x_n)$.
**2)** Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
**3)** On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans $E$. On pose $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de $x$ sur $F$ puis $d(x, F)$ la distance de $x$ à $F$ (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$.