Planche n° 13. Séries de Fourier

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (**) : **1)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

n° 2 : Développer en série de Fourier les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

2) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

3) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2 + 16n + 3}$.

4) (***) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}$.

5) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \sin x)$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.

n° 3 (***) : Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
1) a) Développer en série trigonométrique la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{a - \cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b, de l'équation $z^2 - az + 1 = 0$).
b) La série obtenue est-elle la série de Fourier de f ?
2) Déduire de 1) la valeur des intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos t}\,dt$, $n \in \mathbb{N}$.

n° 4 (* I) :** (un développement en série de fonctions de $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et $\mathrm{cotan}(\pi z)$).
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telles que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.
1) Développer la fonction f en série de Fourier.
2) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi\,\mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

n° 5 (**) : Développer en série de Fourier la fonction $f : x \mapsto x - E(x) - \dfrac{1}{2}$.