# Planche n° 13. Séries de Fourier. Corrigé

**n° 1 : 1)** • Puisque f est impaire, $f(0) = 0$. Puisque f est impaire et $2\pi$-périodique, $-f(\pi) = f(-\pi) = f(\pi)$ et donc $f(\pi) = 0$. Puisque f est $2\pi$-périodique, pour $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) = f(0) = 0$ et $f((2k+1)\pi) = f(\pi) = 0$. Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k\pi) = 0$.

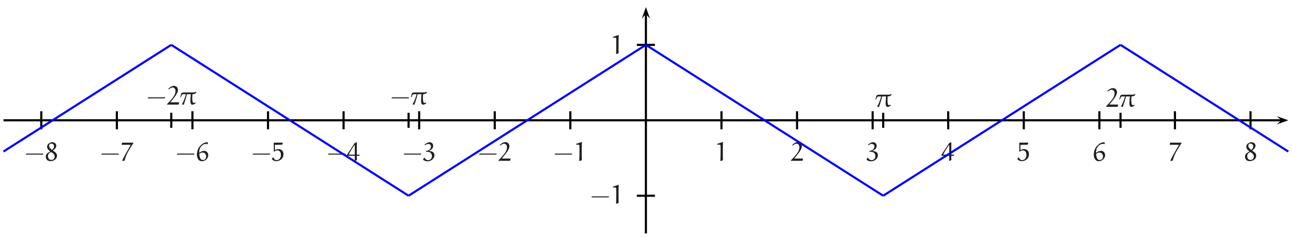
Soit $x \in ]-\pi, 0[$. Puisque f est impaire, $f(x) = -f(-x) = -\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et donc $\forall x \in ]-\pi, \pi[$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi < \pi$ et puisque f est $2\pi$-périodique, $f(x) = f(x - 2k\pi) = \sin\left(\dfrac{x - 2k\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. De plus, $-\pi < x - 2k\pi < \pi \Rightarrow k < \dfrac{x+\pi}{2\pi} < k+1$ et $k = E\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \text{ où } k = E\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right) \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

**2)** • Soit $x \in [-\pi, 0]$. Puisque f est paire, $f(x) = f(-x) = \sin\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \sin\left(\left|\dfrac{x}{2}\right|\right)$ et donc $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\left|\dfrac{x}{2}\right|\right)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi$ et puisque f est $2\pi$-périodique, $f(x) = f(x - 2k\pi) = \sin\left(\left|\dfrac{x - 2k\pi}{2}\right|\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\left|\dfrac{x}{2} - k\pi\right|\right) \text{ où } k = E\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right).}$$

**n° 2 : 1)** La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.




Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) \cos(nx)\, dx$.
Par suite, $a_0(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx\right) = \frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La fonction f est $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.}$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ensuite, si $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on a

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

et donc $S = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

D'autre part, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique, la formule de Parseval fournit $\dfrac{(a_0(f))^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

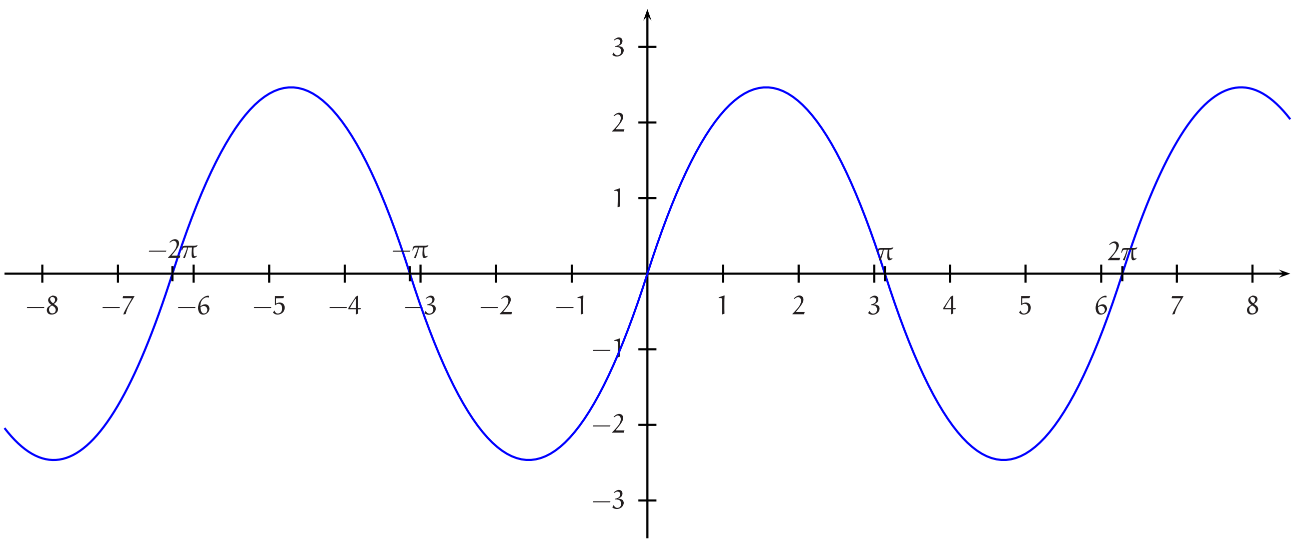
et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3} \times \frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}$. Enfin, si on pose $S = \dfrac{1}{n^4}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16},$$

et donc $S = \dfrac{16}{15} \times \dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

**2)** La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.




Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi-x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(\pi-2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Ensuite, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi-x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = 2\pi^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}$$

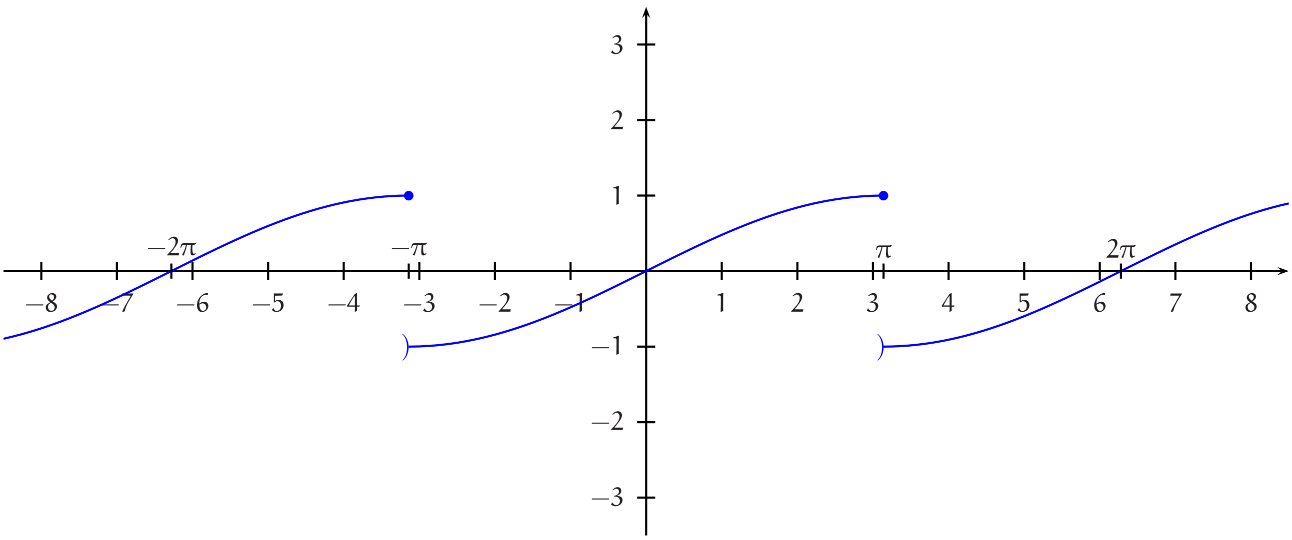
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64}\times\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^6}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{S}{64},$$

et donc $S = \frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.}$$

**3)** La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.




La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, impaire et $2\pi$-périodique telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}} = -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

La fonction f est $2\pi$-périodique et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge en tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in ]-\pi,\pi[,\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\sin(nx).}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ fournit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2p+1}{4(2p+1)^2-1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2p+1}{16p^2+1p+3},$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.}$$

**4)** $f$ est $2\pi$-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et paire. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx$.

**1ère solution.** Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f)&=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)e^{inx}\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\lambda+in)x}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}e^{(-\lambda+in)x}\,dx\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi}-e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in}+\frac{e^{(-\lambda+in)\pi}-e^{-(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in}\right)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in}+\frac{-2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in}\right)\\
&=\frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda-in}{\lambda^2+n^2}+\frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2}\right)=\frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

**2ème solution.** Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f)&=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}\left(\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\lambda}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx\right)\right)\\
&=\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}-\frac{n^2}{\lambda^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\times\frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2}=\frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La fonction $f$ est $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $f$ converge vers $f$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}+\frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos(nx).}$$

L'égalité $f(0)=1$ fournit $1=\frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}+\frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}=\frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\left(1-\frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right)=\frac{\pi\,(\operatorname{sh}(\lambda\pi)-\pi\lambda)}{2\lambda^2\pi\operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

et l'égalité $f(\pi)=\operatorname{ch}(\lambda\pi)$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2}=\frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\left(\operatorname{ch}(\lambda\pi)-\frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right)=\frac{\lambda\pi\operatorname{ch}(\lambda\pi)-\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\boxed{\forall\lambda>0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}=\frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2}=\frac{\lambda\pi\operatorname{ch}(\lambda\pi)-\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}.}$$

La fonction $f$ est $2\pi$-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'égalité de Parseval s'écrit $\frac{(a_0(f))^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2+(b_n(f))^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ avec

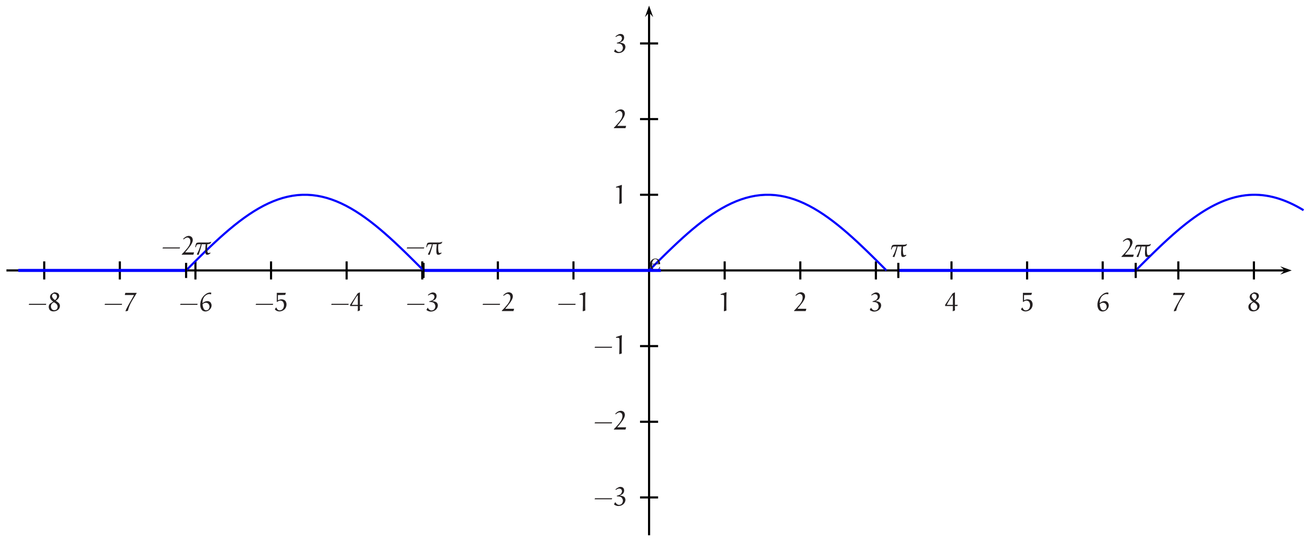
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{ch}(2\lambda x)+1}{2}\,dx = 1+\frac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi},$$

et donc $1+\dfrac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} = \dfrac{2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}+\dfrac{4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}\left(1+\frac{\mathrm{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi}-\frac{2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}\right) = \frac{2\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\,\mathrm{sh}(2\lambda\pi)-4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\boxed{\forall\lambda>0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2+\pi\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda\pi)\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)-2\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)}.}$$

**5)** La fonction $f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.




Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup(\sin x,0)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)\,dx$$

$$= \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx \text{ si } n=1\\ \dfrac{1}{2\pi}\left[-\dfrac{\cos((n+1)x)}{n+1}+\dfrac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \text{ si } n\neq 1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\left[-\dfrac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} \text{ si } n=1\\ \dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\dfrac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) \text{ si } n\neq 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}0 \text{ si } n=1\\ -\dfrac{1+(-1)^n}{\pi}\dfrac{1}{n^2-1} \text{ si } n\neq 1\end{cases}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x))\,dx = \begin{cases}\dfrac{1}{2} \text{ si } n=1\\ 0 \text{ si } n\neq 1\end{cases}$$

La fonction $f$ est $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $f$ converge vers $f$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel $x$

$$\sup(\sin x,0) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos(2px).$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sup(\sin x,0) = \frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).}$$

L'égalité $f(0) = 0$ fournit $\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

**Remarque.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}$

**n° 3 : 1) a)** Soit $a \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Pour tout réel $t$, $a - \cos t \neq 0$ et

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{2}{2a - e^{it} - e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}.$$

L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ admet deux solutions non nulles inverses l'une de l'autre. On note $b$ la solution de plus petit module de sorte que $|b| \leqslant 1$.

On ne peut avoir $|b| = 1$ car alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. On en déduit que $2a = b + \dfrac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2,2]$ puis que $a \in [-1,1]$ ce qui n'est pas. Donc $|b| \neq 1$. Plus précisément, puisque $|b| \leqslant \left|\dfrac{1}{b}\right|$, on a $|b| < 1$ et $\left|\dfrac{1}{b}\right|$. En particulier, $b \neq \dfrac{1}{b}$.

Ensuite, pour $|t| < |b|$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-\cos t} &= \frac{-2e^{it}}{(e^{it}-b)\left(e^{it}-\dfrac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\dfrac{1}{b}-b}\left(\frac{b}{e^{it}-b} - \frac{1/b}{e^{it}-\dfrac{1}{b}}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(\frac{be^{-it}}{1-be^{-it}} + \frac{1}{1-be^{it}}\right)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(be^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty}b^ne^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty}b^ne^{int}\right) \text{ (car } |be^{it}| = |be^{-it}| = |b| < 1)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b^{n+1}e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty}b^ne^{int}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}b^ne^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty}b^ne^{-int}\right)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\cos(nt)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a-\cos t} = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}b^n\cos(nt)\right).}$$

**b)** Pour tout réel $t \in [-\pi,\pi]$ et tout entier naturel non nul $n$, on a $|b^n\cos(nt)| \leqslant |b|^n$. Comme la série numérique de terme général $|b|^n$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto b^n\cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$.
On sait alors que la série obtenue est la série de Fourier de $f$.

**2)** Puisque la fonction $f$ est paire, pour tout entier naturel $n$, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$. Donc, pour tout entier naturel $n$ (y compris pour $n = 0$),

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.}$$

**n° 4 : 1)** Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. La fonction $f$ est $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de Fourier de $f$ converge vers $f$ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Dirichlet.

Puisque $f$ est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)\cos(nx)\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n+\alpha)x)+\cos((n-\alpha)x))\;dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)x)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)x)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi}\ (\text{car } \alpha\notin\mathbb{Z})\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) = (-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \forall x\in[-\pi,\pi],\ \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx).}
$$

**2)** Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

On prend $\alpha=z$ et $x=0$ dans la formule précédente et on obtient $1=\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}+\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$ $(*)$. Maintenant,

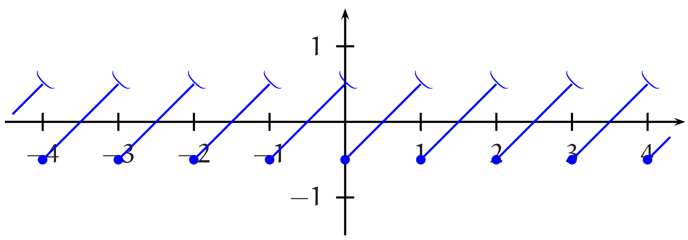
$$
\sin(\pi z)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})=0 \Leftrightarrow e^{i\pi z}=e^{-i\pi z} \Leftrightarrow e^{2i\pi z}=1 \Leftrightarrow 2i\pi z\in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}.
$$

Puisque $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\sin(\pi z)\neq$ à et l'égalité $(*)$ peut s'écrire $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$.

De même, en prenant $\alpha=z$ et $x=\pi$, on obtient $\cos(\pi z)=\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}+\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ et donc $\pi\,\mathrm{cotan}(\pi z)=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$.

$$
\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\ \text{ et }\ \pi\,\mathrm{cotan}(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.}
$$

**n° 5 :** La fonction $f$ est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.




La fonction $f$ a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction $g\ :\ x\mapsto\begin{cases}f(x)\text{ si } x\notin\mathbb{Z}\\ 0\text{ si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ qui est impaire. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$ puis pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{1}\right)\;dt = \int_0^1(2t-1)\sin(2n\pi t)\;dt\\
&= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(2n\pi t)\;dt = \left(-\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi}\right)+0\\
&= -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

La fonction $f$ est de plus de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de DIRICHLET, en tout réel $x$, la série de FOURIER de $f$ converge et a pour pour somme $\dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. En particulier,

$$
\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x)=x-E(x)-\frac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}.}
$$