Planche n° 14. Espaces euclidiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (* I) :** Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

n° 2 (* I) :** **1)** Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2) Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3) Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5) (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

n° 3 (** I) :** Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n + 1$.

n° 4 (I) :** (Inégalité de Hadamard) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\text{det}_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

n° 5 (**) : Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\text{det}A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

n° 6 (***) : Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

n° 7 (**) : On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1) Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

n° 8 (**) : Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$.

n° 9 (***) : Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1+\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

n° 10 (**) : Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

n° 11 : Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéaire.
1) Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\overline{z}$.
2) Calculer $\text{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b.
3) C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne canonique.

n° 12 (***) : Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

n° 13 (**) : Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

n° 14 (* I) :** Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

n° 15 (* I) :** Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$.

n° 16 (**) : Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = a \wedge (a \wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

n° 17 (* I) :** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

n° 18 (I) :** Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1)Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

n° 19 (**) : La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

n° 20 (***) : $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?