

Planche n° 14. Espaces euclidiens. Corrigé

n° 1 : La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXH_nX &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i Y^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0, 1]$ et on en déduit que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ et donc que

la matrice H_n est symétrique définie positive.

n° 2 : 1) ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geq 0$. Donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$. Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PD{}^tP = PD'D{}^tP = (D{}^tP)D{}^tP,$$

et la matrice $A = D{}^tP$ convient.

$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / S = {}^tAA$.

On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A .

3)

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}S,$$

et

$$X \in \text{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}A.$$

Ainsi, $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.

5) Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0^t P_0$.

Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i , $1 \leq i \leq n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0^t P_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 P_0 = P_0 D_0^t P_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de

M , $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2 , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2 , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S .

Ainsi, nécessairement la matrice ${}^t P_0 M P_0$ est une matrice diagonale D . L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / R^2 = S.$$

n° 3 : 1 ère solution. Soit $p \geq 2$. Montrons que si la famille (x_1, \dots, x_p) est obtusangle alors la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle. Supposons que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.

Quitte à multiplier les deux membres de l'égalité par -1 , on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif. On pose $I = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k \leq 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = - \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = - \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (x_i | x_j) \leq 0 \quad (\text{car } \forall (i,j) \in I \times J, (x_i | x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leq 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i | x_p) < 0$.

On a montré que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre et on en déduit que $p-1 \leq n$ ou encore $p \leq n+1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E_n \geq 1$ que toute famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$.

• Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1 . On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.

Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle de E_{n+1} .

Si $p = 1$ alors $p \leq n+2$. Supposons dorénavant $p \geq 2$.

On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n . Soit $F = x_p^\perp$. Puisque la famille (x_1, \dots, x_p) est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n .

On note y_1, y_2, \dots, y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, \dots, x_{p-1} sur F . On sait que

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, y_i = x_i - \frac{(x_i | x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i | y_j) = (x_i | x_j) - 2 \frac{(x_i | x_p)(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i | x_p)(x_j | x_p) \|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i | x_j) - \frac{(x_i | x_p)(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leq n+1$ et donc $p \leq n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

n° 4 : Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, l'inégalité est vraie.

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille (x_1, \dots, x_n) . Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}
 |\det_B(x_1, \dots, x_n)| &= |\det_{B_0}(x_1, \dots, x_n)| = \text{abs} \left(\begin{pmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{pmatrix} \right) \\
 &= \prod_{k=1}^n |(x_k|e_k)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \|e_k\| \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\
 &= \prod_{k=1}^n \|x_k\|.
 \end{aligned}$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_B(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \quad (\text{inégalité de HADAMARD}).$$

Ensuite,

- si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(x_k|e_k)| = \|x_k\| \|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k$ est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

n° 5 : C'est le n° 4.

n° 6 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| &= \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} 1 \times a_{i,j} \times 1 \right| = |{}^t X A X| = |(A X|X)| \\
 &\leq \|A X\| \|X\| \quad (\text{d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\
 &= \|X\|^2 \quad (\text{puisque la matrice } A \text{ est orthogonale}) \\
 &= n.
 \end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille $(X, A X)$ est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A .

On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1 . Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow A X = X \text{ ou } A X = -X \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0, 1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geq \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geq a_{i,j}^2, 1 \leq j \leq n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0, 1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

n° 7 : Le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, (A|B) = \text{Tr}({}^t A B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1) Déterminons l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = -\text{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \dim((\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp)$, on a montré que

$$(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

2) Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.$$

n° 8 : Posons $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. On sait que

$$\begin{aligned} r(u) &= (\cos \theta)u + (1 - \cos \theta)(u|k)k + (\sin \theta)k \wedge u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(u|(e_1 + e_2))(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_1 + e_2) \wedge u \\ &\llcorner \llcorner \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ -x+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice cherchée est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

n° 9 : La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln \left(1 + \exp \left(\frac{1}{n} (\ln(\lambda_1) + \dots + \ln(\lambda_n)) \right) \right) \leq \frac{1}{n} (\ln(1 + \exp(\ln(\lambda_1))) + \dots + \ln(1 + \exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0.$$

La fonction f est donc convexe sur \mathbb{R} ce qui démontre l'inégalité (*).

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}.$$

n° 10 : Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1 . Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\text{card}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.$$

n° 11 1) Soit f un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\text{Re}(z)).1 + (\text{Im}(z)).i) = (\text{Re}(z))f(1) + (\text{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z - \bar{z})f(i) \\ &= \frac{f(1) - if(i)}{2}z + \frac{f(1) + if(i)}{2}\bar{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a = \frac{f(1) - if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1) + if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est \mathbb{R} -linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

2)

$$\text{Tr}(f) = \text{Re}(f(1)) + \text{Im}(f(i)) = \text{Re}(a + b) + \text{Im}(i(a - b)) = \text{Re}(a + b) + \text{Re}(a - b) = 2\text{Re}(a)$$

et

$$\begin{aligned} \det(f) &= \text{Re}(a + b)\text{Im}(i(a - b)) - \text{Im}(a + b)\text{Re}(i(a - b)) = \text{Re}(a + b)\text{Re}(a - b) + \text{Im}(a + b)\text{Im}(a - b) \\ &= (\text{Re}(a))^2 - (\text{Re}(b))^2 + (\text{Im}(a))^2 - (\text{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(f) = 2\text{Re}(a) \text{ et } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.$$

3) Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z'| = (\text{Re}z)(\text{Re}z') + (\text{Im}z)(\text{Im}z') = \frac{1}{4}(z + \bar{z})(z' + \bar{z}') - \frac{1}{4}(z - \bar{z})(z' - \bar{z}') = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}') = \text{Re}(\bar{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1, i)$ soit directe,

$$[z, z'] = (\text{Re}z)(\text{Im}z') - (\text{Im}z)(\text{Re}z') = \frac{1}{4i}(z + \bar{z})(z' - \bar{z}') - \frac{1}{4i}(z - \bar{z})(z' + \bar{z}') = \frac{1}{2i}(\bar{z}z' - z\bar{z}') = \text{Im}(\bar{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1, i)$. Puisque la base $(1, i)$ est orthonormée,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^t M \Leftrightarrow \text{Im}(a + b) = \text{Re}(i(a - b)) \Leftrightarrow \text{Im}(a + b) = -\text{Im}(a - b) \Leftrightarrow 2\text{Im}a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

n° 12 : Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 euclidien orienté. Posons $u = f(i)$, $v = f(j)$ et $w = f(k)$. Nécessairement, $u \wedge v = f(i) \wedge f(j) = f(i \wedge j) = f(k) = w$ et de même $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$.

1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u = v = w = 0$ et donc $f = 0$. Réciproquement, l'application nulle convient.

2ème cas. • Si les trois vecteurs u , v et w sont non nuls alors $u \wedge v \neq 0$ et donc la famille (u, v) est libre. Mais alors la famille (u, v, w) est une base directe de \mathbb{R}^3 .

Ensuite $w = u \wedge v$ est orthogonal à u et v et $v = w \wedge u$ est orthogonal à u . On en déduit que la famille (u, v, w) est une base orthogonale directe de \mathbb{R}^3 .

Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$ et de même $\|u\| = \|v\|\|w\|$ et $\|v\| = \|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\| = (\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u , v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$ et $\|u\| = \|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2 = 1$ et de même $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$.

Finalement, la famille (u, v, w) est une base orthonormée directe.

En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de \mathbb{R}^3 c'est-à-dire une rotation de \mathbb{R}^3 .

• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3 . On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^3 tels que la famille (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormée directe.

Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $f(e_i \wedge e_j) = f(e_i) \wedge f(e_j)$.

Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduit en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1) \wedge f(e_2) = e_3 = f(e_3) = f(e_1 \wedge e_2) \text{ et } f(e_3) \wedge f(e_1) = e_3 \wedge f(e_1) = f(e_2) = f(e_3 \wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de \mathbb{R}^3 .

n° 13 : Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.

Notons alors $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1 D {}^t P_1$ et $S_2 = P_2 D {}^t P_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2 ({}^t P_1 S_1 P_1) {}^t P_2 = (P_2 {}^t P_1) S_1 {}^t (P_2 {}^t P_1).$$

Comme la matrice $P_2 {}^t P_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}$$

n° 14 : Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB {}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles.

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice n° 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM {}^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM {}^tN = {}^t(M {}^tN)M {}^tN$. D'après le n° 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.$$

n° 15 : Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.

D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$.

La matrice $A + B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A + B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A + B) \geq 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice n° 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1}))M$ et donc

$$\det(A + B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1}) = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X ,

$${}^tXCX = {}^tX{}^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geq 0$$

et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2 (1 + \det C) \leq (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A + B).$$

On a montré que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leq \det(A + B)).$$

n° 16 : Si $\mathbf{a} = 0$, $f = 0$ et il n'y a plus rien à dire.

Si $\mathbf{a} \neq 0$, puisque $f(\mathbf{a}) = 0$, 0 est valeur propre de f et $\text{Vect}(\mathbf{a}) \subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à \mathbf{a} , d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (\mathbf{a} \cdot x)\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|^2 x = -\|\mathbf{a}\|^2 x.$$

Donc le réel non nul $-\|\mathbf{a}\|^2$ est valeur propre de f et $\mathbf{a}^\perp \subset E_{-\|\mathbf{a}\|^2}$. Maintenant, $\dim \text{Vect}(\mathbf{a}) + \dim \mathbf{a}^\perp = 3$ et donc $\text{Sp}(f) = (0, -\|\mathbf{a}\|^2, -\|\mathbf{a}\|^2)$ puis $E_0(f) = \text{Vect}(\mathbf{a})$ et $E_{-\|\mathbf{a}\|^2} = \mathbf{a}^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable. On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

n° 17 : Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude. On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par hypothèse, la famille $(f(\mathbf{e}_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \perp (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = \|\mathbf{e}_i\|^2 - \|\mathbf{e}_j\|^2 = 0$ et donc $f(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \perp f(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(\mathbf{e}_i)\| = \|f(\mathbf{e}_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Si $k = 0$, tous les $f(\mathbf{e}_i)$ sont nuls et donc f est nulle.

Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ de la base orthonormée \mathcal{B} est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ conserve la norme.

Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

n° 18 : Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i, j) = ((1, -1, 0, 0), (1, 0, 2, -3))$. On orthonormalise la base (i, j) .

On prend $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ puis $\mathbf{e}_2' = j - (j|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (1, 0, 2, -3) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$ puis $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

Une base orthonormée de P est $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ où $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

1) Le projeté orthogonal de $\mathbf{u} = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned} p_P(\mathbf{u}) &= (\mathbf{u}|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{u}|\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(x - y)(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{54}(x + y + 4z - 6t)(1, 1, 4, -6) \\ &= \frac{1}{27}(14x - 13y + 2z - 3t, -13x + 14y + 2z - 3t, 2x + 2y + 8z - 12t, -3x - 3y - 12z + 18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$M = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$S = 2M - I_4 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.$$

2) La distance de $u = (x, y, z, t)$ à P est

$$\begin{aligned} \|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27} \|(14x + 13y - 2z + 3t, 13x + 14y - 2z + 3t, -2x - 2y + 19z + 12t, 3x + 3y + 12z + 9t)\| \\ &= \frac{1}{27} \sqrt{(14x + 13y - 2z + 3t)^2 + (13x + 14y - 2z + 3t)^2 + (-2x - 2y + 19z + 12t)^2 + (3x + 3y + 12z + 9t)^2}. \end{aligned}$$

n° 19 : 1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} (x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1 \leq i \leq n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.

2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

On note alors que $\text{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n - 1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \text{Tr}A = n(n-1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

La matrice A est positive et non définie.

n° 20 : Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note respectivement A_j , B_j et C_j la j -ème colonne de matrice A , de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$1 = \|C_j\| \leq (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0, 1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.