Planche n° 15. Formes quadratiques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (**) : Rang et signature des formes quadratiques suivantes :

1) $Q((x,y,z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2) $Q((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
3) $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$.
4) $Q((x,y,z,t)) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$.
5) $Q((x_1,...,x_5)) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.
6) $Q((x_1,...,x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij x_i x_j$.
7) $Q((x_1,...,x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{i} x_i x_j$.
8) $Q((x_1,...,x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Inf}(i,j) x_i x_j$.

n° 2 (**) : Soit $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2),\ Q(f) = \lambda \mathrm{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1) Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2) Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q. Analyser en particulier les cas $(\lambda,\mu) = (1,0)$ et $(\lambda,\mu) = (0,1)$.

n° 3 (**) : Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note φ sa forme polaire.
On suppose que φ est non dégénérée mais non définie. Montrer que Q n'est pas de signe constant.

n° 4 (* I) :** Soient f_1, f_2,..., f_n n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $b_{i,j} = \displaystyle\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt$ puis pour $(x_1,...x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j} x_i x_j$.
1) Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2) Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.
3) Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [a,b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

n° 5 (***) : Soit S une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1,...,x_n)) = -\det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

n° 6 (**) : Sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

1) $Q((x,y)) = x^2 + 10xy + y^2$.
2) $Q((x,y)) = 6x2 + 4xy + 9y2$.
3) $Q((x,y,z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz$.

n° 7 (***) : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.
1) Montrer que Q est une forme quadratique sur E.
2) Déterminer sa signature.

n° 8 (I) :** Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^tTT$.

n° 9 (* I) :** Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux (utiliser le n° 8).