Planche n$^{\text{o}}$ 15. Formes quadratiques. Corrigé

n$^{\text{o}}$ 1 : **1) 1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X)\left(X^2+8X-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}X-2\right) - 2\left(-2X+\frac{5}{4}\right) \\ &= -X^3 - 6X^2 + \frac{45}{2}X = -X\left(X^2+6X-\frac{45}{2}\right).\end{aligned}$$

Puisque A est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de A sont réelles. χ_A admet pour racines 0 et deux réels non nuls de signes contraires (puisque leur produit vaut $-\frac{45}{2}$). Par suite, le rang et la signature de Q sont

$$\boxed{r = 2 \text{ et } s = (1,1).}$$

2ème solution. On effectue une réduction de Gauss.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z)) &= 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz = 2x^2 + x(3y-4z) - 2y^2 + 7yz - 6z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y - z\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}y - z\right)^2 - 2y^2 + 7yz - 6z^2 = 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}y^2 + 10yz - 8z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y-\frac{8}{5}z\right)^2.\end{aligned}$$

Les formes linéaires $(x,y,z) \mapsto x + \frac{3}{4}y - z$ et $(x,y,z) \mapsto y - \frac{8}{5}z$ étant linéairement indépendantes, on retrouve le fait que Q est de rang $r = 2$ et de signature $s = (1,1)$. La forme quadratique Q est dégénérée et n'est ni positive ni négative.

2) La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le nombre 4 est valeur propre de A et puisque A est diagonalisable, 4 est valeur propre d ?ordre $\dim(\mathrm{Ker}(A-4I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A-4I_3) = 2$. La dernière valeur propre λ est fournie par $4+4+\lambda = \mathrm{Tr}(A) = 9$ et $? = 1$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = (1,4,4)$.
Les trois valeurs propres de A sont strictement positives et donc la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(3,0)$.

$$\boxed{Q \text{ est définie positive.}}$$

3) Effectuons une réduction de Gauss.

$$Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx = (x+z)(y+t) = \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2.$$

Puisque les deux formes linéaires $(x,y,z,t) \mapsto x+y+z+t$ et $(x,y,z,t) \mapsto x-y+z-t$ sont linéairement indépendantes, la forme quadratique Q est de rang $r = 2$ et de signature $s = (1,1)$.

4) Effectuons une réduction de Gauss.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z,t)) &= x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2 + \lambda y^2 + 4\lambda z^2 + \lambda t^2 - 4\lambda yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2 + \lambda(y-2z+t)^2 + zt = (x+2y+z)^2 + \lambda(y-2z+t)^2 + \frac{1}{4}(z+t)^2 - \frac{1}{4}(z-t)^2.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(2,2)$.
Si $\lambda = 0$, la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$.
Si $\lambda > 0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(3,1)$.

5) 1ère solution. La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $-\frac{1}{2}$ qui est d'ordre 4 et 2 qui est valeur propre simple.Donc, la signature de la forme quadratique Q est

$$\boxed{s = (1,4).}$$

2ème solution. Effectuons une réduction de Gauss.

$$\begin{aligned}
Q((x_1,...,x_5)) &= x_1x_2 + x_1(x_3+x_4+x_5) + x_2(x_3+x_4+x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\
&= (x_1+x_3+x_4+x_5)(x_2+x_3+x_4+x_5) - (x_3+x_4+x_5)^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_4x_5 - \frac{3}{4}x_5^2 \\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 - \frac{5}{6}x_5^2,
\end{aligned}$$

et on retrouve $s = (1,4)$.

6) $Q(x_1,...,x_n) = (x_1+...+x_n)^2$ et donc

$$\boxed{r = 1 \text{ et } s = (1,0).}$$

7) Pour $n \geqslant 2$, $Q((x_1,...,x_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}(i+1)x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)x_i\right)^2$. Donc

$$\boxed{r = 2 \text{ et } s = (1,1)}$$

car les deux formes linéaires $(x_1,...,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n}(i+1)x_i$ et $(x_1,...,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n}(i-1)x_i$ sont indépendantes pour $n \geqslant 2$.

8) Puisque la matrice de Q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Q((x1,...,xn)) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + ... + \sum_{n-1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + x_n^2 \\
&= (x_1+...+x_n)^2 + (x_2+...+x_n)^2 + ... + (x_{n-1}+x_n)^2 + x_n^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q \text{ est donc définie positive.}}$$

n° 2 : 1) Si la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

$$Q(f) = \lambda(a^2 + 2bc + d^2) + \mu(ad - bc).$$

Q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et donc Q est une forme quadratique sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2) • Si $\lambda=\mu=0$, $r=0$ et $s=(0,0)$. Si $\lambda=0$ et $\mu\neq 0$,

$$Q(f)=\frac{\mu}{4}(a+d)^2-\frac{\mu}{4}(a-d)^2-\frac{mu}{4}(b+c)^2+\frac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

et donc $r=4$ et $s=(2,2)$.

• Si $\lambda\neq 0$,

$$\begin{aligned}Q(f)&=\lambda a^2+\mu ad+(2\lambda-\mu)bc+\lambda d^2=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+(2\lambda-\mu)bc+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2\\&=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2+\frac{2\lambda-\mu}{4}(b+c)^2-\frac{2\lambda-\mu}{4}(b-c)^2.\end{aligned}$$

Maintenant, les quatre formes linéaires $(a,b,c,d)\mapsto a+\frac{\mu}{2\lambda}d$, $(a,b,c,d)\mapsto d$, $(a,b,c,d)\mapsto b+c$ et $(a,b,c,d)\mapsto b-c$ sont linéairement indépendantes. Donc
- si $\mu=2\lambda$ $(\neq 0)$, $r=1$,
- si $\mu=-2\lambda$ $(\neq 2\lambda)$, $r=3$,
- si $|\mu|\neq 2|\lambda|$ $(\neq 0)$, $r=4$.

En particulier, si $\lambda=1$ et $\mu=0$, alors $r=4$ et $s=(3,1)$ et si $\lambda=0$ et $\mu=1$, $r=4$ et $s=(2,2)$.

n° 3 : Dans le cas où E est de dimension finie, la signature de Q permet de conclure immédiatement. Supposons donc que E n'est pas de dimension fine.
Par hypothèse, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $Q(x_0)=0$. Supposons Q de signe constant. Ouite à remplacer Q par $-Q$, on supposera que Q est positive. D ?après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (valable pour les formes quadratiques positives)

$$\forall y\in E,\ |\varphi(x_0,y)|\leqslant\sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)}=0.$$

Donc $\forall y\in E$, $\varphi(x_0,y)=0$ et x_0 est dans le noyau de φ. Puisque $x_0\neq 0$, on en déduit que φ est dégénérée. En résumé, si Q est de signe constant, φ est dégénérée ou encore si φ est non dégénérée, Q n'est pas de signe constant.

n° 4 : **1)** Pour tout $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$Q(x_1,...,x_n)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt\right)x_ix_j=\int_a^b\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jf_i(t)f_j(t)\right)\,dt=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n x_if_i(t)\right)^2\,dt\geqslant 0.$$

Donc Q est une forme quadratique positive.

2) De plus, pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $Q((x_1,...,x_n))=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_if_i=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Donc

$$\begin{aligned}Q\text{ définie}&\Leftrightarrow\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [Q((x_1,...,x_n))=0\Rightarrow(x_1,...,x_n)=0]\\&\Leftrightarrow\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [\sum_{i=1}^n x_if_i=0\Rightarrow(x_1,...,x_n)=0]\\&(f_1,...,f_n)\text{ libre.}\end{aligned}$$

3) Dans le cas particulier envisagé, la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de HILBERT $H_n=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

n° 5 : Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&x_1&\ldots&x_n\\x_1&&&\\ \vdots&&S&\\x_n&&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&{}^tX\\X&S\end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit $\begin{pmatrix}0&{}^tX\\X&S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&S^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&{}^tXS^{-1}\\X&I_n\end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXS^{-1}X & {}^tXS^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A) \times \det(S^{-1}) \times (-1) = {}^tXS^{-1}X$ puis que $Q(X) = -\det(A) = {}^tX((\det(S))S^{-1})X = {}^tXS'X$ où $S' = (\det(S))S^{-1}$.
Maintenant, la matrice S est définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. Les valeurs propres de la matrice S' sont les $\dfrac{\det(S)}{\lambda}$ où λ décrit le spectre de S et donc la matrice S' est aussi une matrice symétrique définie positive. Q est donc une forme quadratique définie positive.

n° 6 : 1) (Quand x^2 et y^2 ont les mêmes coefficients, penser à faire une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$) En posant $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, on obtient

$$x^2 + 10xy + y^2 = \frac{1}{2}(X+Y)^2 + 5(X+Y)(X-Y) + \frac{1}{2}(X-Y)^2 = 6X^2 - 4Y^2.$$

Ainsi, si on note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, on a

$$x^2 + 10xy + y^2 = Q(xi+yj) = Q(Xe_1 + Ye_2) = 6X^2 - 4Y^2.$$

2) La matrice de Q dans la base canonique (i,j) de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Les deux nombres 5 et 10 ont une somme égale à $15 = \mathrm{Tr}(A)$ et un produit égal à $50 = \det(A)$ et sont donc les valeurs propres de A. On sait alors que dans une base orthonormée (e_1, e_2) de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres $(5,10)$, on a $Q(Xe_1 + Ye_2) = 5X^2 + 10Y^2$. Déterminons une telle base.
$(A - 5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(A - 5I_2) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ puis $\mathrm{Ker}(A - 10I_2) = (\mathrm{Ker}(A-5I_2))^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Donc, si $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $u = xi + yj = Xe_1 + Ye_2$, alors $q(u) = 6x2 + 4xy + 9y2 = 5X^2 + 10Y^2$. De plus, $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)$.

3) La matrice de Q dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9-X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-8X-12) - \sqrt{6}(-\sqrt{6}X - 6\sqrt{6}) + 5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X - 42\sqrt{2}) \\ &= -X^3 + 12X^2 + 36X - 432 = -(X-6)(X+6)(X-12).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 6I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 3y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -12x - 4\sqrt{6}y = 0 \\ 12\sqrt{2}x + 8\sqrt{3}y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}x \\ z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}x \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2}z \\ y = -\sqrt{3}z \end{array}\right.$$

et $\mathrm{Ker}(A - 6I_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)$. De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + 6I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 15y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y \\ 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = -\sqrt{2}x \end{array}\right.$$

et Ker$(A+6I_3) = $ Vect(e_2) où $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -\sqrt{2})$.

Enfin Ker$(A-12I_3) = $ Vect(e_3) où

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on pose $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ alors $PA\,{}^tP = \mathrm{diag}(6, -6, 12)$ ou encore

$$Q(Xe_1 + Ye_2 + Ze_3) = 6X^2 - 6Y^2 + 12Z^2 \text{ où } \mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

n° 7 : 1) Soit P un élément de E. D'après un théorème de croissances comparées, $P(k)P(-k)e^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et donc $Q(P)$ existe.

Pour tout élément P de E, $Q(P) = B(P, P)$ où B est la forme bilinéaire symétrique définie sur E par

$$\forall (P_1, P_2) \in E^2,\ B(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(P_1(k)P_2(-k) + P_1(-k)P_2(k))e^{-k}\right)$$

et donc Q est une forme quadratique sur E.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes pairs et G le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes impairs. F et G sont supplémentaires dans E.

Soit P est un polynôme pair et non nul. Tout d'abord , $Q(P) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(P(k))^2e^{-k} \geqslant 0$. De plus, comme P ne peut admettre tout entier naturel pour racine, on a plus précisément $Q(P) > 0$. De même, si P est impair et non nul, $Q(P) < 0$.
Ainsi, la restriction de Q à F (resp. G) est définie positive (resp.négative). Enfin, si P_1 est pair et P_2 est impair, on a

$$B(P_1, P_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(-k)e^{-k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(k)e^{-k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(-k)P_2(k)e^{-k} = -B(P_2, P_1) = -B(P_1, P_2),$$

et donc $B(P_1, P_2) = 0$ (F et G sont orthogonaux pour B).

Il existe un base de F dans laquelle $Q_{/F}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(F)$ et de même il existe un base de G dans laquelle $Q_{/G}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(G)$. Maintenant, si P est un polynôme quelconque de parties paire et impaire P_1 et P_2 respectivement,

$$Q(P) = Q(P_1 + P_2) = Q(P_1) + 2B(P_1, P_2) + Q(P_2) = Q_{/F}(P_1) + Q_{/G}(P_2).$$

Donc la réunion des deux bases ci-dessus est une base de E dans laquelle Q est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes dans laquelle $\dim(F) = E\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ coefficients sont strictement positifs et $\dim(G) = E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ sont strictement négatifs. Finalement,

$$\boxed{Q \text{ est donc non dégénérée de signature } s = \left(E\left(\frac{n}{2}\right) + 1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).}$$

n° 8 : A est la matrice d'un produit scalaire φ dans une certaine base $\mathscr{B}$ fixée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ et T la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. La matrice T est triangulaire de même que la matrice ${}^tT$.
Puisque la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée pour le produit scalaire φ, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est I_n. D'après les formules de changement de base, $A = {}^tT(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\varphi)T = {}^tTT$.

n° 9 : Puisque la matrice A est définie positive, il existe d ?après le n° 8 une matrice triangulaire supèrieure inversible T telle que $A = {}^t TT$. Posons alors $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$$\det(A) = (\det(T))^2 = t_{1,1}^2 ... t_{n,n}^2$$

Mais pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2$ et donc $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque. On a montré au passage que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ de A étaient des réels strictement positifs.