

Planche n° 16. Coniques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Etudier les courbes dont une équation en repère orthonormé est :

- 1) $2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 6y + 1 = 0.$
- 2) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0.$
- 3) $2x^2 - 4xy - 3x + 3y + 1 = 0.$
- 4) $-5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0.$
- 5) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x + 1 = 0.$
- 6) $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0.$
- 7) $x^2 + y^2 - 3x - y + 2 = 0.$
- 8) $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0.$
- 9) $(x + 2y - 4)(x - y - 1) = 3.$
- 10) $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0.$

n° 2 ()** : Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

$$1) r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \quad 2) r = \frac{6}{2 + \cos\theta} \quad 3) r = \frac{2}{1 - \sin\theta}.$$

n° 3 (*)** : 1) Montrer que toute courbe de degré inférieur ou égal à 2 admet une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \frac{P(t)}{R(t)} \\ y(t) = \frac{Q(t)}{R(t)} \end{cases}$$

où P, Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et montrer réciproquement que toute courbe paramétrée du type précédent est une courbe de degré inférieur ou égal à 2.

2) Etudier la courbe $\begin{cases} x = \frac{2t + 1}{t^2 + 2t - 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 2t - 1} \end{cases}.$

n° 4 ()** : Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole qui soient perpendiculaires.

n° 5 (*)** : 1) (Droite de SIMSON) Soient ABC un triangle et M un point du plan.

Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R du point M sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite passant par les points P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au cercle (ABC).

2) (Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle) Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. Fournir en particulier la construction des points de contacts.

n° 6 (*)** : (\mathcal{C}) est le cercle de diamètre [AB]. (\mathcal{D}) est la tangente en A au cercle (\mathcal{C}). P est un point variable sur le cercle (\mathcal{C}) et (\mathcal{T}) la tangente en P au cercle (\mathcal{C}). (\mathcal{S}) recoupe (\mathcal{D}) en S. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe la droite (BS) en M. Ensemble des points M ?

n° 7 ()** : L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k). On note (Γ) la courbe d'équations

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

n° 8 ()** : Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

n° 9 (*) :** Soit (\mathcal{H}) une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de (\mathcal{H}) symétriques par rapport à O . Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe (\mathcal{H}) en trois points formant un triangle équilatéral de centre P .

n° 10 ()** : Equation cartésienne de la parabole tangente à (Ox) en $(1, 0)$ et à (Oy) en $(0, 2)$.