Planche n° 17. Quadriques. Corrigé

n° 1 : **1)** Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y - z)^2 = X^2 + 2Y^2$ en posant $X = x$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y - z)$ et $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$ correspondant au changement de bases orthonormées de matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Notons $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ le repère orthonormé ainsi défini. La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation dans $\mathscr{R}$? $X^2 + 2Y^2 - 4X + 2\sqrt{2}(Y + Z) - 1 = 0$ ou encore

$$(X - 2)^2 + 2\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde elliptique de sommet S de coordonnées $\left(2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $(2, 2, 1)$ dans $\mathscr{R}$.

2) En posant $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$ et $Z = z$, on obtient : $2X^2 + Z^2 = 1$.

La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre elliptique d'axe (OY) ou encore d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = -x \\ z = 0 \end{array}\right.$.

3) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$.

La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 1 - X & -1 & 1 \\ -1 & 1 - X & 0 \\ 1 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^3 + (X - 1) + (X - 1) = (1 - X)((1 - X)^2 - 2) \\ &= (1 - X)(1 + \sqrt{2} - X)(1 + \sqrt{2} - X). \end{aligned}$$

Q est de rang 3 et de signature $(2, 1)$. La surface $(\mathscr{S})$ peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.

$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

$\text{Ker}(A - (1 + \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1)$ et $\text{Ker}(A - (1 - \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1)$

La matrice de passage correspondante est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère (O, e_1, e_2, e_3).

$$\begin{aligned}
&X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(Y+Z)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}X-Y+Z)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}X+Y-Z)+1=0\\
&\quad\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y^2+\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}Y\right)+(1-\sqrt{2})\left(Z^2-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}Z\right)+1=0\\
&\quad\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+\frac{3+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3+\sqrt{2})^2}{8(1+\sqrt{2})}+(1-\sqrt{2})\left(Z-\frac{3-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3-\sqrt{2})^2}{8(1-\sqrt{2})}+1=0\\
&\quad\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{11+6\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{2})}+\frac{11-6\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})}-1\\
&\quad\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}\\
&\quad\Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2-\frac{4(1+\sqrt{2})}{3}\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=1.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées $\left(0,-1+\frac{\sqrt{2}}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

4) On pose $X=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y)$ et $Z=z$. Dans le repère $\mathscr{R}'$ ainsi défini, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $5X^2+5Z^2-\frac{2}{\sqrt{5}}(X+2Y)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X+Y)=0$ ou encore $5\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5Z^2=1$.

La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l}X=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ Z=0\end{array}\right.$ dans $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

5) $x^2-4x-3y-2=0\Leftrightarrow(x-2)^2=3(y+2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre parabolique de direction (Oz).

6) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}7&2&10\\2&-2&8\\10&8&4\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A&=\begin{vmatrix}7-X&2&10\\2&-2-X&8\\10&8&4-X\end{vmatrix}=(7-X)(X^2-2X-72)-2(-2X-72)+10(10X+36)\\
&=-X^3+9X^2+162X=-X(X+9)(X-18).
\end{aligned}$$

Donc Q est de rang 2 et de signature $(1,1)$.

$(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7x+2y+10z=0\\2x-2y+4z=0\\10x+8y+4z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=-4z\\5x+4y=-2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2z\\y=2z\end{array}\right.$ et $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(A+9I_3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}16x+2y+10z=0\\2x+7y+8z=0\\10x+8y+13z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-8x-5z\\z=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x\\z=-2x\end{array}\right.$ et $\operatorname{Ker}(A+9I_3)=\operatorname{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)$.

$\operatorname{Ker}(A-18I_3)=\operatorname{Vect}(e_3)$ où $e3=-e_1\wedge e_2=\frac{1}{3}(2,1,2)$.

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$

$$\begin{aligned}
&7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0\\
&\quad\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2-12(-2X+Y+2Z)+24(2X+2Y+Z)-36(X-2Y+2Z)+36=0\\
&\quad\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2+36X+108Y-72Z+36=0\Leftrightarrow -Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0\\
&\quad\Leftrightarrow 4(X+8)=(Y-6)^2-2(Z-2)^2.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde hyperbolique. Son point selle est le point de cordonnées $(-8, 6, 2)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

7) La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx - x + y = 0$.
Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx$. La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. Un base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de vecteurs propres est la famille de matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Dans le repère $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $\frac{3}{2}(X^2+Y^2) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right) = 0$ ou encore $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - \sqrt{2}X = 0$ ou enfin $\left(X - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{2}{9}$.

La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ Y = 0 \end{array}\right.$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8) En posant $X = y$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$ (et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z)$, $xy + yz = 0 \Leftrightarrow XY = \sqrt{2}$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre hyperbolique.

9) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$.
La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ et passant par le point critique $\Omega(-1, 1, -1)$.
Quand on se place dans le repère (Ω, i, j, k), la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $XY+YZ+ZX+2 = 0$ (car $f(-1, 1, -1) = 2$) puis dans le repère (Ω, e_1, e_2, e_3), $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + 2 = 0$ ou encore $\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

n° 2 : On cherche $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \neq (0, ..., 0)$ tel que la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ contienne la parabole $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, la parabole $(\mathscr{P}')$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = \frac{t^2}{2} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(2, 3, 2)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}) \subset (\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4 + bt^2 + dt^3 + gt^2 + 2ht + j = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4 + dt^3 + (b + g)t^2 + 2ht + j = 0 \\ &\Leftrightarrow a = d = h = j = 0 \text{ et } g = -b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ est contenue dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+cz^2+2eyz+2fzx-2bx+2iz = 0$ avec $(b, c, e, f, i) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}') \subset (\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ bt^2 + \frac{c}{4}t^4 + et^3 + it^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{c}{4}t^4 + et^3 + (b + i)t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow c = e = 0 \text{ et } i = -b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont contenues dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2 + 2fzx - 2bx - 2bz = 0$ avec $(b, f) \neq (0, 0)$.

Enfin, $A \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow 9b + 8f - 4b - 4b = 0 \Leftrightarrow b = -8f$ et $f \neq 0$. On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $-4y2 + zx + 8x + 8z = 0$.

En posant $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y = y$ et $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, on obtient

$$\begin{aligned} -4y2 + zx + 8x + 8z &= -4Y^2 + \frac{1}{2}(X+Z)(X-Z) + 8\sqrt{2}X \\ &= \frac{1}{2}\left(X + 8\sqrt{2}\right)^2 - 4Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 - 64. \end{aligned}$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface $(\mathscr{S})$ est $\dfrac{1}{128}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2 - \dfrac{1}{16}Y^2 + \dfrac{1}{128}Z^2 = 1$ et $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes.

n° 3 : Soit $(\mathscr{S})$ une surface du second degré d'équation $f(x,y,z) = 0$ où f est symétrique en x, y et z. Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les trois fonctions symétriques élémentaires en x, y et z.

Puisque f est symétrique en x, y et z, f est un polynôme en σ_1, σ_2 et σ_3. f est d'autre part un polynôme de degré 2 en x, y et z et donc

$$\text{il existe } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } (a,b) \neq (0,0) \text{ tel que } f = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d.$$

Réciproquement, si f est de la forme ci-dessus, alors f est symétrique en x, y et z.

Puisque $\sigma_2 = xy + yz + zx = \dfrac{1}{2}((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2))$, $(\mathscr{S})$ admet une une équation cartésienne de la forme :

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)(x+y+z)^2 - b(x^2+y^2+z^2) + c(x+y+z) + d = 0 \text{ où } (a,b) \neq (0,0).$$

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{n}$ est vecteur normal à tout plan d'équation $x+y+z = k$, $k \in \mathbb{R}$) et soit r une rotation quelconque d'axe $(\mathscr{D})$.
Si M est un point de coordonnées (x,y,z) et $M' = r(M)$ a pour coordonnées (x',y',z') alors $x+y+z = x'+y'+z'$ car M et M' sont dans un plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ car une rotation est une isométrie et car $r(O) = O$.

Finalement, pour toute rotation r d'axe $(\mathscr{D})$, $M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow r(M) \in (\mathscr{S})$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est une surface de révolution d'axe $(\mathscr{D})$.

n° 4 : Soit $A(a,b,c)$ un point quelconque de l'espace E_3.
Déterminons un système d'équation du cercle (C_A) d'axe (Δ) d'équations $x = y = z$ passant par A.
Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par A de vecteur normal $(1,1,1)$ et de la sphère de centre O et de rayon OA.
Un système d'équations de (C_A) est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z = a+b+c \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2 \end{array}\right.$.

Déterminons alors une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x,y,z)$ soit un point de $(\mathscr{S})$ est $(C_M) \cap (\mathscr{D}) \neq \varnothing$. Donc

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} x+y+z = \alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ x+y+z = \gamma+2+2\gamma+1+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ \gamma = \frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2 + \left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z+5)^2 + 4(x+y+z-1)^2 + (x+y+z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = 6(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 38 \\ &\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{S})$ est $5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0$.

La matrice de la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto 5(x^2 + y^2 + z^2) - 6(xy + yz + zx)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation $x + y + z = 0$ et -1 valeur propre d'ordre 1 associé à la droite d'équation. Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ où $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow 8x'^2 + 8y'^2 - z'^2 - \sqrt{3}z' - 19 = 0 \Leftrightarrow 8\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 8y'^2 - z'^2 = 19 + \frac{3}{32}.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à une nappe.

n^o 5 : **1)** On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x, y, z) \in (\mathscr{S}) \setminus \{O\} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \ O + \lambda\overrightarrow{OM} \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{ \begin{array}{l} \lambda x = t \\ \lambda y = t^2 \\ \lambda z = t^3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \exists t \in \mathbb{R}^* / \left\{ \begin{array}{l} t = \lambda x \\ y = \lambda x^2 \\ z = \lambda^2 x^3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 x^3$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = y^2 x.$$

Si on récupère le point O, $M(x, y, z) \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow (x = y = 0 \text{ ou } xy \neq 0)$ et $z = y^2 x$.

On peut noter que la surface d'équation $z = y^2 x$ est la réunion du cône, sommet O compris, et des axes (Ox) et (Oy) qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point O).

2) On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x, y, z) \in (\mathscr{S}) \setminus \{S\} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \ S + \lambda\overrightarrow{SM} \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \ (1 + \lambda(x - 1), -1 + \lambda(y + 1), \lambda z) \in (\mathscr{C})$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \left\{ \begin{array}{l} -1 + \lambda(y + 1) + \lambda z = 1 \\ (1 + \lambda(x - 1))^2 + (-1 + \lambda(y + 1))^2 = \lambda z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{y + z + 1}(x - 1)\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{y + z + 1}(y + 1)\right)^2 = \frac{2}{y + z + 1} z$$

$$\Leftrightarrow (2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z \text{ et } y + z + 1 \neq 0.$$

En résumé, $M(x, y, z)$ est dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $M = S$ ou $M \neq S$ et $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ et $y + z + 1 \neq 0$.

Maintenant le point $S(1, -1, 0)$ est dans le plan (P) d'équation $y + z + 1 = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface $(\mathscr{S})$ contient un et un seul point de ce plan.
Notons alors $(\mathscr{S}')$ la surface d'équation $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ et vérifions que l'intersection de $(\mathscr{S}')$ et de (P) est $\{S\}$. Ceci montrera que $(\mathscr{S}') = (\mathscr{S})$.

$$M(x, y, z) \in (\mathscr{S}) \cap (P) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + z + 1 = 0 \\ (2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow M = S$$

Finalement $(\mathscr{S}') = (\mathscr{S})$. Une équation de $(\mathscr{S})$ est donc $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ ou encore $4x^2 + 2y^2 + 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 6z + 2 = 0$. $(\mathscr{S})$ est donc un cône du second degré.

n^o 6 : Notons (C) le cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$.

1) Ici $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et le point S est extérieur à cette sphère. Donc

$$M(x, y, z) \in (C) \Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } d(O, (SM)) = 3 \Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \Leftrightarrow \|(0, 5, 0) \wedge (x, y - 5, z)\| = 3\|(x, y - 5, z)\|$$

$$\Leftrightarrow (5z)^2 + (5x)^2 = 9(x^2 + (y - 5)^2 + z^2) \Leftrightarrow 16x^2 - 9(y - 5)^2 + 16z^2 = 0.$$

2) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $(\mathscr{S})$ (c'est-à-dire tel que $x_0^2 + x_0y_0 + z_0 - 1 = 0$). $(\mathscr{S})$ est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M_0 est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0 + \frac{1}{2}(y_0x + x_0y) + \frac{1}{2}(z + z_0) - 1 = 0.$$

Ce plan tangent contient le point $S(0, 0, 0)$ si et seulement si $z_0 = 2$ ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations $\left\{\begin{array}{l} x^2 + xy + z - 1 = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$. C'est une hyperbole du plan d'équation $z = 2$.

Le cône de sommet S circonscrit à $(\mathscr{S})$ est alors le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$. On trouve la surface d'équation $4x^2 + 4xy + z^2 = 0$. C'est un cône du second degré.

n° 7 : Une équation de $(\mathscr{S})$ est encore $xy + yz + zx - \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda = 0$.

La matrice de la forme quadratique $Q\ :\ (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ dans la base (i, j, k) est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est les valeurs propres de cette matrice sont $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ et 1. Le rang de Q est 3 et sa signature est $(1, 2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc $(\mathscr{S})$ est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction $f\ :\ (x, y, z) \mapsto x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda$ appartient à $(\mathscr{S})$.

Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + z = \lambda \\ z + x = \lambda \\ x + y = \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}.$$

On note alors Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

$(\mathscr{S})$ est un cône $\Leftrightarrow \Omega \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$.

• Si $\lambda = 0$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy + yz + zx = 0$. Dans le repère (O, X, Y, Z) où $X = /\mathrm{dfrac}1\sqrt{2}(x - y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 = 0$ ou encore $(\mathscr{S})$ est le cône de révolution de sommet O et de section droite le cercle d'équations $\left\{\begin{array}{l} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \end{array}\right.$ dans (O, X, Y, Z) ou encore $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{array}\right.$ dans (O, x, y, z).

Puisque $(\mathscr{S})$ est un cône de révolution de sommet O et d'axe la droite d'équations $x = y = z$, il est plus interessant de fournir le demi angle au sommet θ. Le point $A(1, 1, 1)$ est sur l'axe et le point $M(2, 2 - 1)$ est sur le cône. Donc $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{\left|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}\right|}{OA \times OM}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

• Si $\lambda = \frac{4}{3}$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy + yz + zx - \frac{4}{3}(x + y + z) + \frac{4}{3} = 0$ dans (O, i, j, k) ou encore $XY + XZ + YZ = 0$ dans (Ω, i, j, k) ce qui ramène au cas précédent.

n° 8 : Pour tout réel t, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \frac{1}{4}e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2) = \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(z(t))^2$ et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation $z^2 = 2(x^2 + y^2)$.

n° 9 : 1)

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = a\cos t + \lambda \\ y = b\sin t \\ z = a\cos t\sin t + \lambda \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} \lambda = x - a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = a\cos t\sin t + x - a\cos t \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} y = b\sin t \\ z = a\cos t\sin t + x - a\cos t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} y = b\sin t \\ z - x = a\cos t(\sin t - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} y = b\sin t \\ b(z-x) = a\cos t(y-b) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2.$$

En effet,

• $\Rightarrow$ / s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = b\sin t$ et $b(z-x) = a\cos t(y-b)$ alors

$$\begin{aligned} b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 &= b^2a^2\cos^2 t(y-b)^2 + b^2\sin^2 t a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2b^2(y-b)^2. \end{aligned}$$

• $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $b^4(z-x)^2 + y^2a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2$ alors $b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2-y^2)$ et donc ou bien $y = b$, ou bien $b^2 - y^2 \geqslant 0$. Par suite, il existe un réel t tel que $y = b\sin t = b\sin(\pi - t)$ puis

$$\begin{aligned} b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2-y^2) &\Rightarrow b^4(z-x)^2 = a^2(b\sin t - b)^2b^2\cos^2 t \Rightarrow b(z-x) = \pm a\cos t(b\sin t - b) \\ &\Rightarrow b(z-x) = a\cos t(y-b) \text{ ou } b(z-x) = a\cos(\pi - t)(y-b) \end{aligned}$$

et il existe un réel t' tel que $y = b\sin t'$ et $b(z-x) = a\cos t'(y-b)$.

2)

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x = X \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + \lambda \\ Y + Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} (y-\lambda) + (z-\lambda) = 1 \\ x^2 + (y-\lambda)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y+z-1)\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (y-z+1)^2 = 4.$$

n° 10 : La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation $z = x$ et est donc engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$.

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/ \left\{\begin{array}{l} x = X - \lambda \\ y = Y \\ z = Z + \lambda \\ Z = X \\ 2X^2 + Y^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} z - \lambda = x + \lambda \\ 2(x+\lambda)^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}(z-x)\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+z)^2 + 2y^2 = 2.$$

n° 11 : Un repère de $(\mathscr{D})$ est $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ où $A(2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D})) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|^2 = R^2\|\overrightarrow{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x-2,y-1,z) \wedge (1,1,1)\|^2 = R^2\|(1,1,1)\|^2 \\ &\Leftrightarrow (y-z-1)^2 + (x-z-2)^2 + (x-y-1)^2 = 3R^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6z + 6 - 3R^2 = 0. \end{aligned}$$

La droite (Oz) est tangente à $(\mathscr{C})$ si et seulement si $d((Oz),(\mathscr{D})) = R$.

$$(Oz) \text{ est tangente à } (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \frac{\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}\right]^2}{\left\|\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right\|^2} = R^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 = \|(-1, 1, 0\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

n° 12 : En un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent : $xx_0 + 2yy_0 + 3zz_0 = 21$.
Ce plan est parallèle au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$ si et seulement si le vecteur $(x_0, 2y_0, 3z_0)$ est colinéaire au vecteur $(1, 4, 6)$ ou encore si et seulement si $2x_0 = y_0 = z_0$.
Enfin le point $(x_0, 2x_0, 2x_0)$ est sur l'ellipsoïde si et seulement si $x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21$ ce qui équivaut à $x_0^2 = 1$.
Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives $x + 4y + 6z = 21$ et $x + 4y + 6z = -21$.

n° 13 : Le plan tangent (P_0) en (x_0, y_0, z_0) tel que $x_0 - 8y_0z_0 = 0$ admet pour équation $(x + x_0) - 8(z_0y + y_0z) = 0$ ou encore $x - 8z_0y - 8y_0z + 8y_0z_0 = 0$.
Un repère de $(\mathscr{D})$ est $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ où $A(-2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{u}(4, 0, -1)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}) \subset (P_0) &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (-2 + 4\lambda) - 8z_0 + 8y_0\lambda + 8y_0z_0 = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (8y_0 + 4)\lambda + 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y_0 + 4 = 0 \text{ et } 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } z_0 = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite $(\mathscr{D})$, à savoir le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ d'équation $3x + 4y + 12z + 2 = 0$.

n° 14 : **1)** Un repère de $(\mathscr{D})$ est $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ où $A(0, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u}(3, 3, 1)$.

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathscr{D})) = 3 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|^2 = 9\|\overrightarrow{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|(x, y + 1, z - 2) \wedge (3, 3, 1)\|^2 = 9 \times 19 \Leftrightarrow (y - 3z + 7)^2 + (x - 3z + 6)^2 + 9(x - y - 1)^2 = 171.\end{aligned}$$

2) Un repère de $(\mathscr{D})$ est $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ où $A(0, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u}(3, 3, 1)$. De plus, $S = A$.

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{AM \times \|\overrightarrow{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right)^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\overrightarrow{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3(y + 1) + (z - 2))^2 = 19(x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2) \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3y + z + 1)^2 - 19(x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 - 15z^2 + 72xy + 24xz + 24yz + 24x - 14y + 84z - 91 = 0.\end{aligned}$$