

# Planche n° 18. Topologie. Corrigé

**n° 1 :** Cas de la boule fermée. Soit  $B = \{u \in E / \|u\| \leq 1\}$ . Soient  $(x, y) \in B^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi,  $\forall (x, y) \in B^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$  et donc  $B$  est convexe.

**Cas de la boule ouverte.** Soit  $B = \{u \in E / \|u\| < 1\}$ . Soient  $(x, y) \in B^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

Puisque  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $0 \leq \|x\| < 1$ , on en déduit que  $\lambda\|x\| < 1$ . Comme  $(1 - \lambda)\|y\| \leq 1$  (et même  $< 1$ ) et donc

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| < 1.$$

La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un convexe de l'espace vectoriel  $E$ .

**n° 2 :** 1) Puisque  $p > 0$  et  $q > 0$ ,  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{p}$  et donc  $p > 1$ . De même,  $q > 1$ . D'autre part,  $q = \frac{p}{p-1}$ .

a) L'inégalité est immédiate quand  $y = 0$ . Soit  $y > 0$  fixé.

Pour  $x \geq 0$ , on pose  $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$ . Puisque  $p > 1$ , la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall x \geq 0, f'(x) = x^{p-1} - y$ .  $f$  admet donc un minimum en  $x_0 = y^{1/(p-1)}$  égal à

$$f(y^{1/(p-1)}) = \frac{y^{p/(p-1)}}{p} + \frac{y^{p/(p-1)}}{q} - y^{1/(p-1)}y = y^{p/(p-1)} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0.$$

Finalement,  $f$  est positive sur  $[0, +\infty[$  et donc

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

b) Posons  $A = \sum_{k=1}^n |a_k|^p$  et  $B = \sum_{k=1}^n |b_k|^q$ .

Si  $A$  (ou  $B$ ) est nul, tous les  $a_k$  (ou tous les  $b_k$ ) sont nuls et l'inégalité est vraie.

On suppose dorénavant que  $A > 0$  et  $B > 0$ . D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \times \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB} \right) = \frac{1}{pA} \sum_{k=1}^n |a_k|^p + \frac{1}{qB} \sum_{k=1}^n |b_k|^q = \frac{1}{pA} \times A + \frac{1}{qB} \times B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et donc  $\sum_{k=1}^n |a_k||b_k| \leq A^{1/p}B^{1/q} = \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$ . Comme  $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k||b_k|$ , on a montré que

$$\forall ((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \quad (\text{Inégalité de HÖLDER}).$$

**Remarque.** Quand  $p = q = 2$ , on a bien  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et l'inégalité de HÖLDER s'écrit

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}).$$

c) Soit  $((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$ . D'après l'inégalité de HÖLDER, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p &= \sum_{k=1}^n |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\ &\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &= \left( \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \right) \left( \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Si  $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = 0$ , tous les  $a_k$  et les  $b_k$  sont nuls et l'inégalité est claire.

Si  $\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p > 0$  et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p, \text{ on obtient } \left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$$

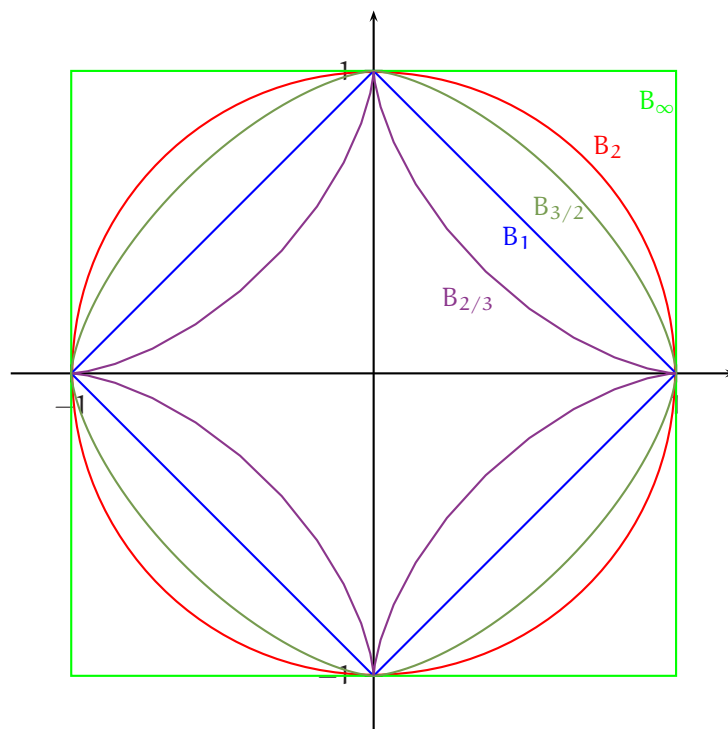
$$\forall (a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}^n)^2, \left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \quad (\text{Inégalité de MINKOWSKI}).$$

2) a) On sait déjà que  $N_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\alpha > 1$ .

- (1)  $N_\alpha$  est bien une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^+$ .
- (2) Soit  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .  $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$ .
- (3) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .  $N_\alpha(\lambda x) = \left( \sum_{k=1}^n |\lambda x_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x)$ .
- (4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.$$

b) Quelques « boules unités » dans  $\mathbb{R}^2$ .



**Remarque.** Toute boule unité est symétrique par rapport à  $O$  puisque  $\forall x \in E, N(x) = N(-x)$  et donc

$$\forall x \in E, N(x) \leq 1 \Leftrightarrow N(-x) \leq 1.$$

c) Soient  $\alpha > 0$  et  $x \in E$ . On a

$$N_\infty(x) \leq N_\alpha(x) \leq n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$ .

$$\boxed{\forall x \in E, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

d) Soient  $\alpha \in ]0, 1[$  puis  $B = \{x \in \mathbb{R}^n / N_\alpha(x) \leq 1\}$ . Les vecteurs  $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$  et  $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$  sont des éléments de  $B$ . Le milieu du segment  $[xy]$  est  $z = \frac{1}{2}(1, 1, 0, \dots, 0)$ .

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc  $z \notin B$ . Ainsi,  $B$  n'est pas convexe et donc  $N_\alpha$  n'est pas une norme d'après l'exercice n° 1.

On peut remarquer que pour  $n = 1$ , les  $N_\alpha$  coïncident toutes avec la valeur absolue.

**n° 3 :** • Il est connu que  $N$  est une norme sur  $E$ .

• Montrons que  $N'$  est une norme sur  $E$ .

(1)  $N'$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  car pour  $f$  dans  $E$ ,  $f'$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et donc  $f'$  est intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .

(2) Soit  $f \in E$ . Si  $N'(f) = 0$  alors  $f(0) = 0$  et  $f' = 0$  (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite,  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que  $f(0) = 0$  et on en déduit que  $f = 0$ .

(3)  $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt = |\lambda| \left( |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \right) = |\lambda| N'(f)$ .

(4) Soit  $(f, g) \in E^2$ .

$$N'(f + g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc  $N'$  est une norme sur  $E$ .

• Montrons que  $N''$  est une norme sur  $E$ . On note que  $\forall f \in E, N''(f) = |f(0)| + N'(f')$  et tout est immédiat.

$$\boxed{N, N' \text{ et } N'' \text{ sont des normes sur } E.}$$

• Soit  $f \in E$  et  $t \in [0, 1]$ . Puisque la fonction  $f'$  est continue sur  $[0, 1]$

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(u) du| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)| du = N'(f),$$

et donc  $N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N'(f) dt = N'(f)$ .

Ensuite en appliquant le résultat précédent à  $f'$ , on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leq |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E, N(f) \leq N'(f) \leq N''(f).}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(t) = t^n$ .

$N(f_n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$  et donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé  $(E, N)$ .

Par contre, pour  $n \geq 1, N'(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1} dt = 1$  et la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé  $(E, N')$ . On en déduit que

$$\boxed{\text{les normes } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas des normes équivalentes.}}$$

De même en utilisant  $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ , on montre que les normes  $N'$  et  $N''$  ne sont pas équivalentes.

**n° 4 : 1)** Soit  $d : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . On sait que l'application  $d$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (muni de n'importe quelle norme) et que  $\mathbb{R}^*$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  en tant que réunion de deux intervalles ouverts.

Par suite,  $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le polynôme  $\det(A - xI)$  n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul) donc pour  $p$  entier naturel supérieur ou égal à un certain  $p_0$ ,  $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$ . La suite  $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p \geq p_0}$  est une suite d'éléments de  $GL_n(\mathbb{R})$  convergente de limite  $A$ . Ceci montre que l'adhérence de  $GL_n(\mathbb{R})$  est  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ou encore  $GL_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**2)**  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$  est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.

Soit  $n \geq 2$ . Les matrices  $A_p = pE_{1,1}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , sont non inversibles et la suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est non bornée. Par suite  $M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$  est non borné et donc non compact.

$\forall n \geq 2, M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$  est fermé mais non compact.

**3) •** Montrons que  $O_n(\mathbb{R})$  est fermé. Posons  $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $h : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  puis

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto M^t M$$

$g$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car linéaire sur un espace de dimension finie.  $h$  est continue sur  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$  car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que  $f = h \circ g$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Enfin  $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$  est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

• Montrons que  $O_n(\mathbb{R})$  est borné.  $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $|a_{i,j}| \leq 1$  et donc  $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_\infty \leq 1$ .

D'après le théorème de BOREL-Lebesgue, puisque  $O_n(\mathbb{R})$  est un fermé borné de l'espace de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  est un compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$O_n(\mathbb{R})$  n'est pas convexe. En effet, les deux matrices  $I_n$  et  $-I_n$  sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est  $0$  qui n'est pas une matrice orthogonale.

$O_n(\mathbb{R})$  est compact mais non convexe.

**4)**  $S_n(\mathbb{R})$  est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et est donc un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$S_n(\mathbb{R})$  est fermé.

**5)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $p$  un élément fixé de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  (le résultat est clair si  $p = 0$  ou  $p = n$ ).

$A$  est de rang inférieur ou égal à  $p$  si et seulement si tous ses mineurs de format  $p+1$  sont nuls (hors programme).

Soient  $I$  et  $J$  deux sous-ensembles donnés de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $p+1$  et  $A_{I,J}$  la matrice extraite de  $A$  de format  $p+1$  dont les numéros de lignes sont dans  $I$  et les numéros de colonnes sont dans  $J$ .

Pour  $I$  et  $J$  donnés, l'application  $A \mapsto A_{I,J}$  est continue car linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ . Par suite, l'application  $f_{I,J} : A \mapsto \det(A_{I,J})$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble des matrices  $A$  telles que  $\det(A_{I,J}) = 0$  est donc un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (image réciproque du fermé  $\{0\}$  de  $\mathbb{R}$  par l'application continue  $f_{I,J}$ ) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à  $p$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'intersection de fermés.

**6)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Posons  $Sp(A) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On sait que toute matrice est triangulable dans  $\mathbb{C}$  et donc il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  avec  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $t_{i,i} = \lambda_i$  telle que  $A = PTP^{-1}$ .

On munit dorénavant  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  d'une norme multiplicative notée  $\|\cdot\|$ . Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif  $K$  telle que pour toute matrice  $M$ ,  $\|M\| \leq K\|M\|_\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un  $n$ -uplet de réels  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0 \leq \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$  et les  $\lambda_k + \varepsilon_k$  sont deux

à deux distincts. (On prend  $\varepsilon_1 = 0$  puis  $\varepsilon_2$  dans  $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right]$  tel que  $\lambda_2 + \varepsilon_2 \neq \lambda_1 + \varepsilon_1$  ce qui est possible puisque

$\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right]$  est infini puis  $\varepsilon_3$  dans  $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right]$  tel que  $\lambda_3 + \varepsilon_3$  soit différent de  $\lambda_1 + \varepsilon_1$  et  $\lambda_2 + \varepsilon_2$  ce qui est

possible puisque  $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right]$  est infini ...)

On pose  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  puis  $T' = T + D$  et enfin  $A' = PT'P^{-1}$ . Tout d'abord les valeurs propres de  $A'$  sont deux à deux distinctes (ce sont les  $\lambda_i + \varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) et donc  $A'$  est diagonalisable. Ensuite

$$\|A' - A\| = \|PDP^{-1}\| \leq \|P\| \|D\| \|P^{-1}\| \leq K \|P\| \|P^{-1}\| \|D\|_\infty < \varepsilon.$$

En résumé,  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \varepsilon > 0, \exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \|A' - A\| < \varepsilon$  et  $A'$  diagonalisable. On a montré que

L'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans  $\mathbb{C}$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On ne peut remplacer  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} a-X & c-1 \\ b+1 & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) + (b-c) + 1.$$

Le discriminant de  $\chi_{A+E}$  est  $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4$ . Supposons de plus que  $\|E\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ . Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4 \leq \frac{1}{4} + 4 \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) + 4 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

Par suite, aucune des matrices  $A + E$  avec  $\|E\|_\infty \leq \frac{1}{4}$  n'a de valeurs propres réelles et donc aucun donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  n'est pas dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

7) La matrice de la forme quadratique  $Q : (x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$  dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

Les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives si et seulement si  $a + c > 0$  et  $ac - b^2 > 0$ . L'application  $(a, b, c) \mapsto a + c$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$  car linéaire sur  $\mathbb{R}^3$  qui est de dimension finie et l'application  $(a, b, c) \mapsto ac - b^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$  en tant que polynôme.

L'ensemble des triplets considéré est l'intersection des images réciproques par ces applications de l'ouvert  $]0, +\infty[$  de  $\mathbb{R}$  et est donc un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

8) Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices stochastiques.

• Vérifions que  $\mathcal{S}$  est borné. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}$ .  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $0 \leq a_{i,j} \leq 1$  et donc  $\|A\|_\infty \leq 1$ . Ainsi,  $\forall A \in \mathcal{S}$ ,  $\|A\|_\infty \leq 1$  et donc  $\mathcal{S}$  est borné.

• Vérifions que  $\mathcal{S}$  est fermé.

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . L'application  $f_{i,j} : A \mapsto a_{i,j}$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  car linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie.  $[0, +\infty[$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  car son complémentaire  $] -\infty, 0[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Par suite,  $\{A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} / a_{i,j} \geq 0\} = f_{i,j}^{-1}([0, +\infty[)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'application  $g_i : A \mapsto \sum_{j=1}^n a_{i,j}$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  car linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est

de dimension finie. Le singleton  $\{1\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ . Par suite,  $\left\{ A = (a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} / \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \right\} = g_i^{-1}(\{1\})$  est un

fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathcal{S}$  est donc un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'intersection de fermés de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

En résumé,  $\mathcal{S}$  est un fermé borné de l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie et donc  $\mathcal{S}$  est un compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• Vérifions que  $\mathcal{S}$  est convexe. Soient  $(A, B) \in (\mathcal{S})^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . D'une part,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $(1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geq 0$  et d'autre part, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\sum_{j=1}^n ((1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n b_{i,j} = (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

ce qui montre que  $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}$ . On a montré que  $\forall (A, B) \in \mathcal{S}^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{S}$  et donc  $\mathcal{S}$  est convexe.

L'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

9) Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $t \mapsto (1-t)A + t \cdot 0 = (1-t)A$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ . Soit enfin } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ .}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$\gamma_1$  est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et  $\gamma_2$  est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc  $\gamma$  est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel  $t \in [0, 1]$ , la matrice  $\gamma_1(t) = (1-t)A$  est diagonalisable (par exemple, si  $A = \text{Pdiag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} P^{-1}$  alors  $(1-t)A = \text{Pdiag}((1-t)\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} P^{-1}$ ) et de même, pour tout réel  $t \in [0, 1]$ , la matrice  $\gamma_2(t) = tB$  est diagonalisable. Finalement  $\gamma$  est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ , contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ . On a montré que

l'ensemble des matrices diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs.

**n° 5 : 1ère solution.** • Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . Soient  $d = y - x$  puis  $n$  un entier naturel non nul tel que  $\frac{1}{n} < d$  (par exemple,  $n = \mathbb{E}\left(\frac{1}{d}\right) + 1$ ). Soient enfin  $k = \mathbb{E}(nx)$  et  $r = \frac{k+1}{n}$ .  $r$  est un rationnel et de plus

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{k+1}{n} = r \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + d = x + y - x = y.$$

En résumé,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} / x < r < y)$ . Ceci montre que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**2ème solution.** On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

**n° 6 :** 1) Soit A une partie de E.  $\bar{A}$  est fermé et donc  $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ .  $\overset{\circ}{A}$  est ouvert et donc  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

2) Soient A et B deux parties de E telles que  $A \subset B$ .

- Pour tout  $x \in E, x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{B}$ . Donc  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .
- Pour tout  $x \in E, x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$ . Donc  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

3) Soient A et B deux parties de E.

$\bar{A} \cup \bar{B}$  est une partie fermée de E contenant  $A \cup B$ . Donc  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$  (puisque  $\overline{A \cup B}$  est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant  $A \cup B$ ).

Réciproquement,  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$  et  $\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Finalement  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  est un ouvert contenu dans  $A \cap B$  et donc  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$ .

Réciproquement,  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$  et  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

Finalement,  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

4)  $\bar{A} \cap \bar{B}$  est un fermé contenant  $A \cap B$  et donc  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si  $A = [0, 1[$  et  $B = ]1, 2]$ ,  $A \cap B = \emptyset$  puis  $\overline{A \cap B} = \emptyset$  mais  $\bar{A} \cap \bar{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \emptyset$ .

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$  est un ouvert contenu dans  $A \cup B$  et donc  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ .

On n'a pas nécessairement l'égalité. Si  $A = [0, 1]$  et  $B = [1, 2]$ ,  $A \cup B = [0, 2]$  puis  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = ]0, 2[$  mais  $\overset{\circ}{A \cup B} = ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \neq ]0, 2[$ .

5) Soient A et B deux parties de E. Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathcal{B} \subset A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathcal{B} \subset A \text{ et } \mathcal{B} \subset {}^c B \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \text{ et } {}^c B \in \mathcal{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in ({}^c B) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \text{ et } x \in {}^c(\bar{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \cap {}^c(\bar{B}) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A} \setminus \bar{B}. \end{aligned}$$

Donc  $A \setminus B = \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}$ .

6) Soit  $A$  une partie de  $E$ .  $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ . D'autre part  $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A} \subset \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overline{A}}$ . Finalement,  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ .  
 $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\overline{A}}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\overline{A}}}$ . D'autre part  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\overline{A}}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\overline{A}}}$ . Finalement,  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\overline{A}}}$ .

n° 7 : L'exercice n° 6 montre que l'on ne peut pas faire mieux.

Soit  $A = ([0, 1[ \cup ]1, 2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$ .

- $\overset{\circ}{A} = ]0, 1[ \cup ]1, 2[$ .
- $\overline{A} = [0, 2]$ .
- $\overset{\circ}{\overline{A}} = ]0, 2[$ .
- $\overline{\overline{A}} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$
- $\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}} = ]0, 2[ \cup ]4, 5[$ .
- $\overline{\overline{\overline{A}}} = [0, 2] \cup [4, 5]$ .

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

n° 8 : Soit  $f \in E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $g_n$  l'application définie par  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \left| x - \frac{1}{2} \right|$ .

Chaque fonction  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$  mais non dérivable en  $\frac{1}{2}$  ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n \in E \setminus D$ . De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\|f - g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$ . On en déduit que la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  tend vers  $f$  dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .

$f$  est donc limite d'une suite d'éléments de  ${}^cD$  et donc est dans l'adhérence de  ${}^cD$ . Ceci montre que  $\overline{{}^cD} = E$  ou encore  ${}^c(\overset{\circ}{D}) = E$  ou enfin  $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ .

Enfin, puisque  $P \subset D$ , on a aussi  $\overset{\circ}{P} = \emptyset$ .

n° 9 : 1) Soit  $x \in E$ .  $\{\|x - a\|, a \in A\}$  est une partie non vide et minorée (par 0) de  $\mathbb{R}$ .  $\{\|x - a\|, a \in A\}$  admet donc une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit l'existence de  $d_A(x)$ .

2) a) Soit  $A$  une partie fermée et non vide de  $E$ . Soit  $x \in E$ .

- Supposons que  $x \in A$ . Alors  $0 \leq f(x) = \text{Inf}\{\|x - a\|, a \in A\} \leq \|x - x\| = 0$  et donc  $d_A(x) = 0$ .
- Supposons que  $d_A(x) = 0$ . Par définition d'une borne inférieure,  $\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A / \|x - a_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

Soit  $V$  un voisinage de  $x$ .  $V$  contient une boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  puis d'après ce qui précède,  $V$  contient un élément de  $A$ . Finalement,  $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$  et donc  $x \in \overline{A} = A$ .

Si  $A$  est fermée,  $\forall x \in E$ ,  $(d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A)$ .

b) Posons  $d = d_A(x)$ . Pour chaque entier naturel  $n$ , il existe  $a_n \in A$  tel que  $d \leq \|x - a_n\| \leq d + \frac{1}{n}$ .

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. En effet,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $\|a_n\| \leq \|a_n - x\| + \|x\| \leq d + \frac{1}{n} + \|x\| \leq d + \|x\| + 1$ .

Puisque  $E$  est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite  $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$  convergeant vers un certain élément  $a$  de  $E$ .

Ensuite, puisque  $A$  est fermée, on en déduit que  $a \in A$ . Puis, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d \leq \|x - a_{\varphi(n)}\| \leq d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisque  $\varphi(n)$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient quand  $n$  tend vers l'infini,  $d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$ .

Maintenant on sait que l'application  $y \mapsto \|y\|$  est continue sur l'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\| = \left\| x - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} \right\| = \|x - a\|.$$

On a montré qu'il existe  $a \in A$  tel que  $d_A(x) = \|x - a\|$ .

3) Soit  $x \in E$ .

Puisque  $A \subset \overline{A}$ ,  $d_{\overline{A}}(x)$  est un minorant de  $\{\|x-a\|, a \in A\}$ . Comme  $d_A(x)$  est le plus grand des minorants de  $\{\|x-a\|, a \in A\}$ , on a donc  $d_{\overline{A}}(x) \leq d_A(x)$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $y \in \overline{A}$  tel que  $\|x-y\| < d(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$  et puis il existe  $a \in A$  tel que  $\|y-a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . On en déduit que

$$d_A(x) \leq \|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi,  $\forall \varepsilon > 0, d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$ . Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient  $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$ .

Finalement

$$\forall x \in E, d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).$$

4) Montrons que l'application  $d_A$  est Lipschitzienne. Soit  $(x, y) \in E^2$

Soit  $a \in A$ .  $d_A(x) \leq \|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$ . Donc,  $\forall a \in A, d_A(x) - \|x-y\| \leq \|y-a\|$  ou encore  $d_A(x) - \|x-y\|$  est un minorant de  $\{\|y-a\|, a \in A\}$ . Puisque  $d_A(y)$  est le plus grand des minorants de  $\{\|y-a\|, a \in A\}$ , on a donc  $d_A(x) - \|x-y\| \leq d_A(y)$ .

En résumé,  $\forall (x, y) \in E^2, d_A(x) - d_A(y) \leq \|x-y\|$ . En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on obtient  $\forall (x, y) \in E^2, d_A(y) - d_A(x) \leq \|x-y\|$  et finalement

$$\forall (x, y) \in E^2, |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x-y\|.$$

Ainsi l'application  $d_A : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  est 1-Lipschitzienne et en particulier  $d_A$  est continue sur l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ .

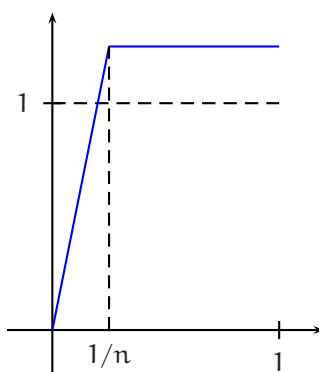
5) Soient  $A$  et  $B$  deux parties fermées et non vides de  $E$  telles que  $d_A = d_B$ .

Soit  $a \in A$ .  $d_B(a) = d_A(a) = 0$  (d'après 2)) et donc  $a \in B$  (d'après 2)). Ainsi  $A \subset B$  puis, par symétrie des rôles,  $B \subset A$  et finalement  $A = B$ .

6) ( $A$  n'est pas un sous espace vectoriel de  $E$ .)

Soit  $f \in A$ .  $1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty$ . Ainsi,  $\forall f \in A, \|f\|_\infty \geq 1$  et donc  $d_A(0) \geq 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 + \frac{1}{n}x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ .



Pour chaque entier naturel non nul  $n$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$  et

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geq 1.$$

Donc, la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $A$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_A(0) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$ .

En résumé,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq d_A(0) \leq 1 + \frac{1}{n}$  et finalement

$$d_A(0) = 1.$$

**Remarque.**  $A$  est fermée mais la distance à  $A$  n'est malgré tout pas atteinte. En effet

• Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $A$  convergeant dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  vers un certain élément  $f$  de  $E$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  et donc d'une part,  $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

et d'autre part  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \geq 1$ . Donc  $f \in A$  et on a montré que  $A$  est fermée.

• Supposons qu'il existe  $f \in A$  telle que  $\|f\|_\infty = 1$ . Alors l'encadrement  $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \|f\|_\infty = 1$  fournit  $\int_0^1 f(x) dx = \|f\|_\infty = 1$  puis  $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x)) dx = 0$  et donc  $\|f\|_\infty - f = 0$  (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore  $f = 1$  ce qui contredit  $f(0) = 0$ . On ne peut donc pas trouver  $f \in A$  tel que  $d_A(0) = d(0, f)$ .

**n° 10 : 1)** Soit  $x \in E$ . Puisque  $D$  est dense dans  $E$ , il existe une suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $D$  convergeant vers  $x$  et puisque  $f$  et  $g$  sont continues et coïncident sur  $D$  et donc en  $x$

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(d_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n\right) = g(x).$$

On a montré que  $f = g$ .

**2)** Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Soit  $a = f(1)$ .

•  $x = y = 0$  fournit  $f(0) = 0 = a \times 0$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .  $f(nx) = f(x + \dots + x) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$ . Ceci reste vrai pour  $n = 0$ .

• En particulier  $x = 1$  fournit pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f(n) = nf(1) = an$  puis  $x = \frac{1}{n}$  fournit

$$nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = a \text{ et donc } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}.$$

• Ensuite,  $\forall(p, q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)^2$ ,  $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$ .

• Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'égalité  $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$  fournit  $f(-x) = -f(x)$ .

• En particulier,  $\forall(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -a\frac{p}{q}$ .

En résumé, si  $f$  est morphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans lui-même,  $\forall r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = ar$  où  $a = f(1)$ .

Si de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , les deux applications  $f : x \mapsto f(x)$  et  $g : x \mapsto ax$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et coïncident sur  $\mathbb{Q}$  qui est dense dans  $\mathbb{R}$ . D'après le 1),  $f = g$  ou encore  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$  où  $a = f(1)$ .

Réciproquement, toute application linéaire  $x \mapsto ax$  est en particulier un morphisme du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans lui-même, continu sur  $\mathbb{R}$ .

Les morphismes continus du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans lui-même sont les applications linéaires  $x \mapsto ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**n° 11 :** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de l'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note  $\ell$ . Montrons que la suite  $u$  converge vers  $\ell$ .

Supposons par l'absurde que la suite  $u$  ne converge pas vers  $\ell$ . Donc

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 / \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon \quad (*).$$

$\varepsilon$  est ainsi dorénavant fixé.

En appliquant (\*) à  $n_0 = 0$ , il existe un rang  $\varphi(0) \geq n_0 = 0$  tel que  $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geq \varepsilon$ .

Puis en prenant  $n_0 = \varphi(0) + 1$ , il existe un rang  $\varphi(1) > \varphi(0)$  tel que  $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geq \varepsilon \dots$  et on construit ainsi par récurrence une suite extraite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$ .

Maintenant, la suite  $u$  est bornée et il en est de même de la suite  $(u_{\varphi(n)})$ . Puisque  $E$  est de dimension finie, le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite  $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(u_{\varphi(n)})$  et donc de  $u$  convergeant vers un certain  $\ell' \in E$ .  $\ell'$  est donc une valeur d'adhérence de la suite  $u$ . Mais quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité  $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$ , on obtient  $\|\ell' - \ell\| \geq \varepsilon$  et donc  $\ell \neq \ell'$ . Ceci constitue une contradiction et donc  $u$  converge vers  $\ell$ .

**n° 12 :** Pour  $\alpha \in ]0, \pi[$ , posons  $f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin(n\alpha)|$ .

• Tout d'abord  $\forall \alpha \in ]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\sin(n(\pi - \alpha))| = |\sin(n\alpha)|$  et donc  $\forall \alpha \in ]0, \pi[, f(\pi - \alpha) = f(\alpha)$ .

On en déduit que  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} f(\alpha) = \inf_{\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]} f(\alpha)$ .

- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- Ensuite, si  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(\alpha) \geq \sin(\alpha) \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ . Par suite  $\inf_{\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} f(\alpha) = \inf_{\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]} f(\alpha)$ .

- Soit alors  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ . Montrons qu'il existe un entier naturel non nul  $n_0$  tel que  $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

Il existe un unique entier naturel  $n_1$  tel que  $n_1\alpha \leq \frac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\alpha$  à savoir  $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$ .

Mais alors,  $\frac{\pi}{3} < (n_1 + 1)\alpha = n_1\alpha + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  et l'entier  $n_0 = n_1 + 1$  convient.

Ceci montre que  $f(\alpha) \geq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

Finalement  $\forall \alpha \in ]0, \pi[$ ,  $f(\alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et donc  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = \min_{\alpha \in ]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$\boxed{\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

**n° 13 :** Soit  $f$  une application uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .  $\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1)$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$  (le travail est analogue si  $x \in \mathbb{R}^-$ ).

Pour  $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n\alpha| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x - n\alpha \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - 1 \leq n \leq \frac{x}{\alpha} + 1 \Leftrightarrow n = E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose  $n_0 = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ .

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(x - \alpha)| + |f(x - \alpha) - f(x - 2\alpha)| + \dots + |f(x - (n_0 - 1)\alpha) - f(x - n_0\alpha)| + |f(x - n_0\alpha) - f(0)| + |f(0)| \\ &\leq n_0 + 1 + |f(0)| \quad (\text{car } |x - n_0\alpha - 0| \leq \alpha) \\ &\leq \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$ . Par symétrie des calculs,  $\forall x \in \mathbb{R}^-, |f(x)| \leq \frac{-x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{\alpha} + 2 + |f(0)|.$$

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b.}$$

**n° 14 :** Posons  $I_0 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$  et enfin  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

Pour  $x \in D$ , posons  $f(x) = \tan x - x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $D$  et pour  $x \in D$ ,  $f'(x) = \tan^2 x$ . La fonction  $f$  est ainsi strictement croissante sur chaque  $I_n$  et s'annule donc au plus une fois dans chaque  $I_n$ .

$f(0) = 0$  et donc  $f$  s'annule exactement une fois dans  $I_0$  en  $x_0 = 0$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  est continue sur  $I_n$  et de plus  $f\left(\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'annule au moins une fois dans  $I_n$  et donc exactement une fois dans  $I_n$ .

L'équation  $\tan x = x$  admet donc dans chaque intervalle  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une et une seule solution notée  $x_n$ . De plus,  $\forall n \geq 1$ ,  $f(n\pi) = -n\pi < 0$  et donc  $x_n \in ]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  puis  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$  et même

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Ensuite, puisque  $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et que  $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ ,  $x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}$ . Donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons  $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ . Alors d'après ce qui précède,  $y_n \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  et  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ . De plus, l'égalité  $\tan(x_n) = x_n$  fournit  $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$  ou encore

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n = -\cotan(y_n).$$

Puisque  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ , on obtient  $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$  ou encore  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons  $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ . D'après ce qui précède,  $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}$  et aussi

$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ . On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**n° 15 : 1ère solution.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Posons  $z = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\theta_n}$  où  $r_n \geq 0$  et  $\theta_n \in ]-\pi, \pi]$  de sorte que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}.$$

Puisque  $1 + \frac{z}{n}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , pour  $n$  assez grand on a  $r_n > 0$  et  $\theta_n \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Mais alors pour  $n$  assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Maintenant,  $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(x + o(1))$  et donc  $r_n^n$  tend vers  $e^x$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Ensuite  $n\theta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} y + o(1)$  et donc  $n\theta_n$  tend vers  $y$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Finalement,  $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n}$  tend vers  $e^x \times e^{iy} = e^z$ .

$$\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

**2ème solution.** Le résultat est connu quand  $z$  est réel. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\left|\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) z^k\right| \leq \sum_{k=0}^n \left|\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right| |z|^k.$$

Maintenant,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^k}{\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_k}\right) \geq 0$ . Donc,

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} \right| |z|^k = \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left( 1 + \frac{|z|^n}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{|z|} - e^{|z|} = 0.$$

On en déduit que  $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et puisque  $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$  tend vers  $e^z$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $\left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n$ .