Planche n$^{\text{o}}$ 19. Applications linéaires continues, normes matricielles. Corrigé

n$^{\text{o}}$ 1 (*I) : **1)** • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} = \text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.

• Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.

• Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.

• Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

2) $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et donc $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty},\ P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$. Ceci montre tout à la fois que f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et $|||f||| = 1$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||f||| = 1.}$$

n$^{\text{o}}$ 2 : (La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$,
- $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$.

On en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||\Delta||| = 2.}$$

(La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continue sur E et $|||T||| \leqslant 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$,
- $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$.

On en déduit que

$$\boxed{C \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||C||| = 1.}$$

n° 3 : **1)** Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx\\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx\\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \displaystyle\int_0^x (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)|\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\,dx = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||T||| \geqslant \dfrac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$ et donc $|||T||| = 1$.

$$\boxed{T \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_1) \text{ et } |||T||| = 1.}$$

2) Supposons qu'il existe $f \in E\setminus\{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = 0$.

Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $|||T|||$ n'est pas atteinte.

n° 4 : L'application f est linéaire de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\ |)$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.

$$\begin{aligned}|f(A)| &= |\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_{i,i}|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \leqslant \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A).\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E, N) et que $|||f||| \leqslant n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\dfrac{|f(A)|}{N(A)} = \dfrac{n}{1} = n$. Donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, N) \text{ et } |||f||| = n.}$$

n° 5 : • $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \mathrm{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leqslant n$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$.
Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = n.}$$

En particulier, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.

- $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\ &\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} |a_{i,j}||b_{k,l}| = \|A\|_1\|B\|_1.\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leqslant 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_= E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = 1.}$$

En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

- $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right) \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} b_{l,j}^2\right) = \|A\|_2\|B\|_2\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2} \leqslant 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_= E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = 1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

n° 6 : Une « norme trois barres » sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple $\|\ \|_\infty$). Donc une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une « norme trois barres ».

n° 7 : Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice n° 5, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, N et $\|\ \|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\ \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \|_1$.

Pour $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.

Remarque. Le résultat précédent signifie que $N' = \dfrac{1}{K}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \frac{1}{k^2}N(AB) \leqslant \frac{1}{k^2}N(A)N(B) = \frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

n° 8 : Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

n° 9 : • Pour $\|\ \|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\} = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \times \|X\|_1,
\end{aligned}$$

en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 \leqslant \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Soit alors $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}| = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \times \|X_0\|_1.$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

On en déduit que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

• Pour $\|\ \|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\
&\leqslant \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \mathrm{Max}\{\|L_k\|_1,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} \times \|X\|_\infty,
\end{aligned}$$

en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty \leqslant \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Soit alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j \in [\![1, n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1, 1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j|a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \dfrac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 1$).

$$\begin{aligned}
\|AX_0\|_\infty &= \mathrm{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \\
&\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \|X_0\|_\infty.
\end{aligned}$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geqslant \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

On en déduit que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty = \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Ainsi, en notant $C_1, \ldots, C_n$ et $L_1, \ldots, L_n$ respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice A,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1 = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \text{ et } |||A|||_\infty = \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.}$$

n° 10 : Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.

On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $|||D|||_2 = \rho(D)$.

Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD{}^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|AX\|_2 &= \|PD{}^tPX\|_2 \\
&= \|D({}^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\
&= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX.
\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto {}^tPX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\dfrac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

Remarque. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.