Planche n$^{\text{o}}$ 20. Suites et séries de matrices

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n$^{\text{o}}$ 1 (**) : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a}{n}\\ \dfrac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

n$^{\text{o}}$ 2 (***) : Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p\geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A^n=0$
(3) La série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge.

n$^{\text{o}}$ 3 (**) : Soit $A=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ 5/3 & -7/6\end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$.

n$^{\text{o}}$ 4 (I) :** On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\|<1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}A^n=(I-A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I-A)^{-1}-(I+A)\|\leqslant\dfrac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

n$^{\text{o}}$ 5 (I) :** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geqslant p_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

n$^{\text{o}}$ 6 (I) :** Calculer $\exp(tA)$, $t\in\mathbb{R}$, si **1)** $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$ **2)** $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\6&4&2\\-10&-4&-2\end{pmatrix}$

n$^{\text{o}}$ 7 (**) : Soit $A=\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$. Calculer $\displaystyle\ln(I_3+tA)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

n$^{\text{o}}$ 8 (I) : (exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$).**

1) a) Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$, on pose $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}$. Vérifier que $f_{\overrightarrow{\omega}}\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
b) Réciproquement, soit $f\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ unique tel que $f=f_{\overrightarrow{\omega}}$.

2) Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

n$^{\text{o}}$ 9 (**) : Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(I_n+\frac{A}{p}\right)^p$.

n$^{\text{o}}$ 10 (**) : Montrer que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.