# Planche n° 20. Suites et séries de matrices

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**n° 1 (**) :** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ ($a$ réel strictement positif donné).

**n° 2 (***) :** Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p\geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

**(1)** $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
**(2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$
**(3)** La série de terme général $A^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge.

**n° 3 (**) :** Soit $A=\begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général $A^n$, $n\in\mathbb{N}$.

**n° 4 (** I) :** On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit $A$ un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\|<1$. Montrer que la série de terme général $A^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n=(I-A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I-A)^{-1}-(I+A)\|\leqslant\dfrac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

**n° 5 (** I) :** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p\geqslant p_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

**n° 6 (** I) :** Calculer $\exp(tA)$, $t\in\mathbb{R}$, si **1)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

**n° 7 (**) :** Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3+tA)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n$ en précisant les valeurs de $t$ pour lesquelles la série converge.

**n° 8 (** I) : (exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$).**

**1) a)** Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$, on pose $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}$. Vérifier que $f_{\overrightarrow{\omega}}\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
**b)** Réciproquement, soit $f\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ unique tel que $f=f_{\overrightarrow{\omega}}$.

**2)** Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

**n° 9 (**) :** Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(I_n+\dfrac{A}{p}\right)^p$.

**n° 10 (**) :** Montrer que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en $A$.

 