

Planche n° 22. Fonctions de plusieurs variables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (I) :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ en } (0,0) & 2) \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ en } (0,0) & 3) \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4} \text{ en } (0,0) & 4) \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}} \text{ en } (0,0) \\
 5) \frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y} \text{ en } (0,0) & 6) \frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \text{ en } (0,0) & 7) \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2} \text{ en } (0,0,0) & 8) \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2} \text{ en } (2,-2,0)
 \end{array}$$

n° 2 (* I) :** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur \mathbb{R}^2 .

n° 3 (* I) :** Soit $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 . Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont différents.

n° 4 () :** Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.
 $(x, y) \mapsto (e^x - e^y, x + y)$

n° 5 (*) :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1} + y - x = 0$ définit implicitement une fonction φ sur \mathbb{R} telle que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), [y^{2n+1} + y - x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$.

Montrer que φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $\int_0^2 \varphi(t) dt$.

n° 6 (*) :** Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y} + y - 1 = 0$.

n° 7 (*) : Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 . On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

n° 8 (I) :** Extrema des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1) f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y \\
 2) f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4.
 \end{array}$$

n° 9 (*) I) :** Soit $f : \begin{matrix} GL_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{matrix}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle.

n° 10 (*) : Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

