Planche n° 22. Fonctions de plusieurs variables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (I) :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **2)** $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **3)** $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$ **4)** $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$

5) $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$ **6)** $\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$ **7)** $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$ **8)** $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

n° 2 (* I) :** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

n° 3 (* I) :** Soit $f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq0\\ 0 \text{ si } y=0\end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

n° 4 (**) : Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y, x+y)\end{array}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

n° 5 (***) : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1}+y-x=0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$, $[y^{2n+1}+y-x=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)]$.
Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

n° 6 (***) : Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y}+y-1=0$.

n° 7 (*) : Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda\in]0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

n° 8 (I) :** Extrema des fonctions suivantes :

1) $f(x,y)=x^3+3x^2y-15x-12y$
2) $f(x,y)=-2(x-y)^2+x^4+y^4$.

n° 9 (* I) :** Soit $f : \begin{array}{ccc}GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R})\\ A & \mapsto & A^{-1}\end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

n° 10 (*) : Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant1\}$.

n° 11 (**) : Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1) $\omega = (2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y > x\}$

3) $\omega = \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - ydy$

4) $\omega = \dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2).

n° 12 (* I) :** Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $u = x+y$ et $v = x+2y$.

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en polaires.

3) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

n° 13 (**) : Déterminer la différentielle en tout point de $f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x.y\end{array}$ et $g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x\wedge y\end{array}$.

n° 14 (**) : Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B = \{x\in E/\ \|x\| < 1\}$. Montrer que $f\ :\ \begin{array}{ccc}E & \to & B\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+\|x\|}\end{array}$ est un homéomorphisme.

n° 15 (**) : $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f\ :\ \begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \|x\|_2\end{array}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et préciser df. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

n° 16 (***) : Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

n° 17 (*) : Minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

n° 18 (***) : Trouver une application non constante $f\ :\ ]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f\left(\dfrac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

n° 19 (* I) :** Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.