Planche n° 23. Intégrales curvilignes. Intégrales multiples

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (**) : Calculer l' intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

1) $\omega = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $(0,-1)$ et $(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

2) $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.

3) $\omega = xyzdx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

n° 2 (**) : Soit $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2dx + x^2dy$.

n° 3 (**) : Calculer les intégrales multiples suivantes

1) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\ dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.

2) $I = \displaystyle\iint_{[-1,1]^2} |x+y|\ dxdy$.

3) $I = \displaystyle\iint_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.

4) $I = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdy$.

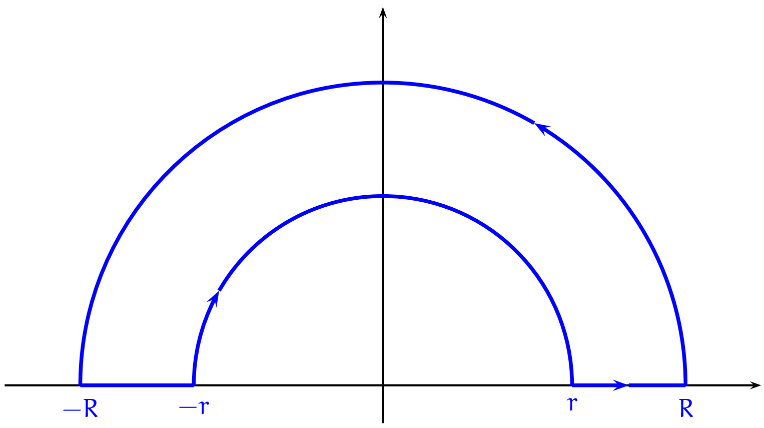
5) $I = \displaystyle\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

6) $I = \displaystyle\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz$.

7) $I = \displaystyle\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz$.

n° 4 (* I) :** (Un calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$).

1) r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x\sin x - y\cos x)dx + (x\cos x + y\sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.

2) En déduire $\displaystyle\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$ en fonction d'une autre intégrale.

3) En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

n° 5 (***) : Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2y\}$.

n° 6 (* I) :** Calculer le volume de $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n/\ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\ \|_2$).

n° 7 (**) : Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

n° 8 (****) : **(Inégalité isopérimétrique)** Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathscr{L}$ sa longueur et $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C). Montrer que

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathscr{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de Parseval aux intégrales permettant de calculer $\mathscr{L}$ et $\mathscr{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

n° 9 (***) : Calculer $I = \displaystyle\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\,dxdy$.