Planche n° 23. Intégrales curvilignes. Intégrales multiples. Corrigé

n° 1 : 1) C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\dfrac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1.

$$\int_C \omega = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt$$
$$= 0 \text{ (fonction impaire).}$$

$$\boxed{\int_C \omega = 0.}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1-\cos(4t))\right) dt = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t)\ dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t)dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\
&= -\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$$

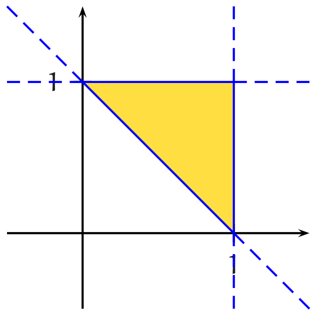
n° 2 : 1) $\omega = x^2 dx + y^2 dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Schwarz. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.

2) $\omega = y^2 dx + x^2 dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.

On parcourt le cercle C le cercle de centre (a, b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma\ :\ t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π.

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma}\omega &= \int_0^{2\pi}\left((b+R\sin t)^2(-R\sin t)+(a+R\cos t)^2(R\cos t)\right)\ dt\\
&= R\int_0^{2\pi}(a\cos t - b\sin t + 2aR\cos^2 t - 2bR\sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t))\ dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(2a\cos^2 t - 2b\sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t))\ dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(a(1+\cos t) - b(1-\cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t\sin t + \sin^2 t))\ dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi}(a - b + R(\cos t - \sin t)(1+\cos t\sin t))\ dt\\
&= R^2\left(2\pi(b-a) + \int_0^{2\pi}R(\cos t - \sin t + \cos^2 t\sin t - \cos t\sin^2 t)\ dt\right)\\
&= 2\pi R^2(b-a).
\end{aligned}
$$

n° 3 : **1)** Représentons le domaine $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant 1,\ y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 1\}$.



$$
\begin{aligned}
I = \iint_D (x+y)\ dxdy &= \int_0^1\left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right)dx \text{ (ou aussi } \int_0^1\left(\int_0^{1-y}(x+y)dx\right)dy)\\
&= \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1}dx = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx\\
&= \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iint_D (x+y)\ dxdy = \frac{2}{3}.}
$$

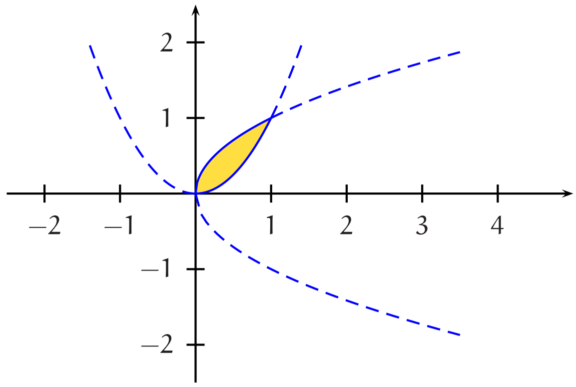
2) Si on pose pour $(x,y)\in /mbr^2$, $f(x,y) = |x+y|$ alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O. Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1,1]^2$, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0} f(x,y)\ dxdy + \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\leqslant 0} f(x,y)\ dxdy\\
&= 2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0}(x+y)\ dxdy = 2\int_{-1}^1\left(\int_{-x}^1 (x+y)\ dy\right)dx\\
&= 2\int_{-1}^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1}dx = 2\int_{-1}^1\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iint_{[-1,1]^2}|x+y|\ dxdy = \frac{8}{3}.}
$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

3) Représentons le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.



$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right) x\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{12}.$$

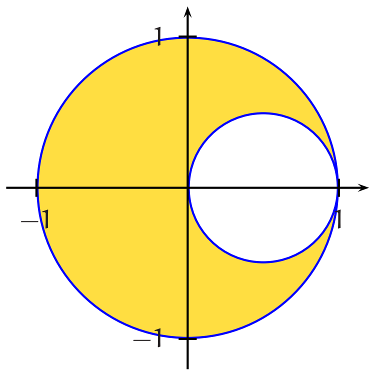
4) En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \frac{1}{1+r^2}\,rdrd\theta \\
&= \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \text{ (intégrales indépendantes)} \\
&= 2\pi \times \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \pi\ln 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \pi\ln 2.}$$

5) Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Puisque $x \leqslant x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r, θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$M \in D \Leftrightarrow r\cos\theta \leqslant r^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } (0 < r \leqslant 1 \text{ et } r \geqslant \cos\theta.$$



En passant en polaires, on obtient

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$
\begin{aligned}
I &= 2\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr\right)d\theta\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^1 d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}\,d(\tan\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}
$$

6)

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 z\,dz\right)y\,dy\right)x\,dx=\int_0^1\left(\int_x^1\frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy\right)x\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1(y-y^3)\,dy\right)x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)x\,dx\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1(x^5-2x^3+x)\,dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{48}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{48}.}
$$

7) En sommant par tranches, on obtient

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}} dx\,dy\right)z\,dz\\
&= \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1}(1-\sqrt{z})^4\,du\,dv\right)z\,dz \text{ (en posant } x=(1-\sqrt{z})^2u \text{ et } y=(1-\sqrt{z})^2v)\\
&= \mathscr{A}(D)\times\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4\,dz \text{ où } D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}.
\end{aligned}
$$

Maintenant,

$$
\mathscr{A}(D)=\int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2}dv\right)du=\int_0^1(1-2\sqrt{u}+u)\,du=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}
$$

et

$$
\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4\,dz=\int_0^1\left(z-4z^{3/2}+6z^2-4z^{5/2}+z^3\right)dz=\frac{1}{2}-\frac{8}{5}+2-\frac{8}{7}+\frac{1}{4}=\frac{1}{140}.
$$

Finalement

$$
\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{840}.}
$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

n° 4 : 1) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, posons $P(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$ et $Q(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\sin x + \cos x + y\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x + y\sin x) + (x^2+y^2)(-x\sin x + \cos x + y\cos x))\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\sin x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\sin x - y\cos x) - 2y(x\sin x - y\cos x) - (x^2+y^2)\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\sin x)\\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On choisit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leqslant 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0,y)$, $y > 0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ. Puisque ω est exacte sur Ω, on sait alors que $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$.

2) Le contour Γ est constitué de 4 arcs :
- Γ_1 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de r à R,
- Γ_2 est l'arc $t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$, t variant en croissant de 0 à π.
- Γ_3 est l'arc $t \mapsto (t,0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,
- Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$, t variant en décroissant de π à 0.

D'après la question 1), $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\ dt = \int_r^R P(t,0)\ dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2} \times t\sin t\ dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\ dt.\end{aligned}$$

De même, $\displaystyle\int_{\Gamma_3} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t}\ dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t}\ dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\ dx$ puis pour tout $(r,R) \in]0,+\infty[^2$ tel que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\ dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^\pi (P(R\cos t, R\sin t)(-\sin t) + Q(R\cos t, \sin t)(\cos t))\ dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}((\cos t\sin(R\cos t) - \sin t\cos(R\cos t))(-\sin t) + (\cos t\cos(R\cos t) + \sin t\sin(R\cos t))(\cos t))\ dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\ dt.\end{aligned}$$

De même, $\displaystyle\int_{\Gamma_4} \omega = \int_\pi^0 e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\ dt = -\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\ dt$ et on a montré que

$$\boxed{\forall (r,R) \in]0,+\infty[^2,\ r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

3) • Etudions $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt$. Pour $R > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,|\cos(R\cos t)|\,dt \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt\\ &\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{R}(1-e^{-2R})\\ &\leqslant \frac{\pi}{R}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. On en déduit que pour tout $r > 0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\boxed{\forall r > 0,\ \int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Etudions maintenant $\lim\limits_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$. Soit $F : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (r,t) & \mapsto & e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\end{array}$.

- Pour tout réel $r \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto F(r,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
- Pour tout réel $t \in [0,\pi]$, la fonction $r \mapsto F(r,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(r,t) \in [0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)| \leqslant 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

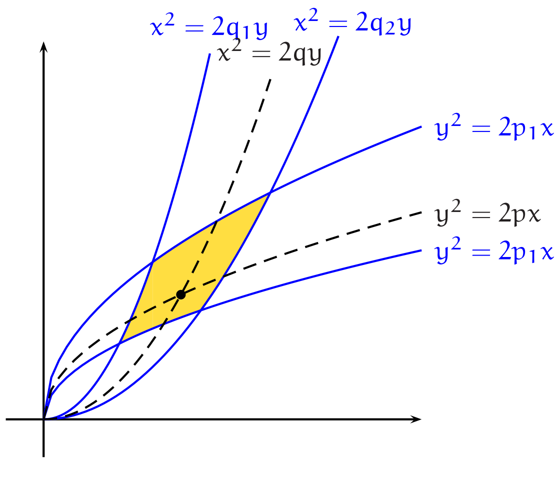
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r \mapsto \int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^\pi e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

et finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

n° 5 :



L'aire du domaine considéré $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2p_1x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2x\}$ est

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy.$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

Pour $(x,y)\in D^2$, posons $p=\dfrac{y^2}{2x}$ et $q=\dfrac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & [p_1,p_2]\times[q_1,q_2] \\ (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{y^2}{2x},\dfrac{x^2}{2y}\right)\end{array}$ et vérifions que φ est un C^1-difféomorphisme.

• Pour chaque $(x,y)\in D^2$, on $2p_1x\leqslant y^2\leqslant 2p_2x$ et $2q_1y\leqslant x^2\leqslant 2q_2y$ ou encore $p_1\leqslant\dfrac{y^2}{2x}\leqslant p_2$ et $q_1\leqslant\dfrac{x^2}{2y}\leqslant q_2$. Donc φ est bien une application.

• Soit $(p,q)\in[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Pour $(x,y)\in(]0,+\infty[)^2$,

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{2x}=p\\ \dfrac{x^2}{2y}=q\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{2q}\\ \dfrac{(x^2/2q)^2}{2x}=p\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{8pq^2}\\ y=\sqrt[3]{8p^2q}\end{array}\right.$$

Donc, l'équation $\varphi(x,y)=(p,q)$ a exactement une solution (x_0,y_0) dans $]0,+\infty[^2$. De plus, puisque $\dfrac{y_0^2}{2x_0}=p\in[p_1,p_2]$ et $\dfrac{x_0^2}{2y_0}=q\in[q_1,q_2]$, on a $2p_1x_0\leqslant y_0^2\leqslant 2p_2x_0$ et $2q_1y_0\leqslant x_0^2\leqslant 2q_2y_0$ et donc $(x_0,y_0)\in D^2$. Donc φ est une bijection.

• φ est de classe C^1 sur D et pour $(x,y)\in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=J(\varphi)(x,y)=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{2x^2} & \dfrac{y}{x}\\ \dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{2y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}\neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D. On sait alors que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$.

Posons alors $(p,q)=\varphi(x,y)$ dans $\displaystyle\iint_D dxdy$. On obtient

$$\mathscr{A}=\iint_D dxdy=\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]}\left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right|dpdq=\frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]}dpdq=\frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathscr{A}=\frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

nº 6 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $R\geqslant 0$, posons $B_n(R)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n.$$

En posant $x_1=Ry_1$, ..., $x_n=Ry_n$, on a $\dfrac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}=R^n$ (quand $R>0$) puis

$$V_n(R)=\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\ldots dx_n=R^n\int\ldots\iint_{y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1}dy_1\ldots dy_n=R^nV_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R=0$. Pour $n\geqslant 2$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}V_n(1)&=\int_{-1}^1\left(\int\ldots\iint_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\ldots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n\\&=\int_{-1}^1(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)\end{aligned}$$

où $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Pour calculer I_n, on pose $x=\cos\theta$. On obtient

$$I_n=\int_\pi^0(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^\pi\sin^n\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=2W_n\text{ (intégrales de WALLIS).}$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

Finalement,

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ V_n(1) = 2W_nV_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n \geqslant 2$,

$$V_n(1) = (2W_n)(2W_{n-1})\dots(2W_2)V_1(1) = 2^n\prod_{k=2}^{n}W_k = 2^n\prod_{k=1}^{n}W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p}W_k = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k}) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned}V_{2p+1}(1) &= 2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1}W_k = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1}) = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)}\\ &= \frac{\pi^p2^{p+1}}{3\times5\times\dots\times(2p+1)} = \frac{\pi^p2^{p+1}(2p)\times(2p-2)\times\dots\times2}{(2p+1)!} = \frac{\pi^p2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall R > 0,\ V_{2p}(R) = \frac{\pi^pR^{2p}}{p!} \text{ et } V_{2p-1}(R) = \frac{\pi^p2^{2p+1}p!R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particulier, $V_1(R) = 2R$, $V_2(R) = \pi R^2$ et $V_3(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

n° 7 : 1ère solution. $V = \displaystyle\iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant1} dxdydz$. Or $x^2+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{3}{4}z^2+xz = \left(x+\dfrac{z}{2}\right)^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}$. On pose donc $u = x+\dfrac{z}{2}$, $v = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$ et $w = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 2$ puis que

$$V = \iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant1} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant1}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw = 2\times\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ est $\dfrac{4}{3}\pi abc$. La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto x^2+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{3}{4}z^2+xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$. On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives $\lambda = \dfrac{1}{a^2}$, $\mu = \dfrac{1}{b^2}$ et $\nu = \dfrac{1}{c^2}$ puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}+\dfrac{Z^2}{c^2} = 1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{8\pi}{3}.}$$

n° 8 : Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L = 2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, telle que $\forall t \in [0, 2\pi]$, $x'^2(t)+y'^2(t) = 1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π-périodiques.

Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L = 2\pi &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \int_0^{2\pi} (x'^2(t) + y'^2(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t) \, dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t) \, dt \\
&= \pi \left(\frac{a_0^2(x')}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \\
&= \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x') + a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) (a_0(x') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'(t) \, dt = \frac{1}{\pi}(x(2\pi) - x(0)) = 0 = a_0(y')) \\
&\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2(x) + b_n^2(x) + a_n^2(y) + b_n^2(y)) \right).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de Green-Riemann

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t) \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ((x(t) + y'(t))^2 - (x(t) - y'(t))^2) \, dt \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_0^2(x + y')}{2} - \frac{a_0^2(x - y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x + y') - a_n^2(x - y') + b_n^2(x + y') - b_n^2(x - y')) \right) \\
&= \pi \left(\frac{a_0(x) a_0(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) a_n(y') + b_n(x) b_n(y')) \right) \text{ (par linéarité des coefficients de Fourier)} \\
&= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n(x) b_n(y) - b_n(x) a_n(y)) \\
&\leqslant \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) = \frac{\mathscr{L}}{2} \times \frac{\mathscr{L}}{\pi} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n \geqslant 1$,

$$n(a_n(x) b_n(y) - b_n(x) a_n(y)) \leqslant n \times \frac{1}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) \leqslant \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour $n \geqslant 2$, on a $a_n(x) = a_n(y) = b_n(x) = b_n(y) = 0$. D'autre part, quand $n = 1$, $a_1(x) b_1(y) - b_1(x) a_1(y) = \frac{1}{2}(a_1^2(x) + b_1^2(y) + b_1^2(x) + a_1^2(y))$ impose $(a_1(x) - b_1(y))^2 + (b_1(x) + a_1(y))^2 = 0$ et donc $a_1(y) = -b_1(x)$ et $b_1(y) = a_1(x)$.

D'après le théorème de Dirichlet, en posant $\alpha = \frac{a_0(x)}{2}$, $\beta = \frac{a_0(y)}{2}$, $a = a_1(x)$ et $b = b_1(x)$,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos t + b \sin t = \alpha + \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - t_0) \\ y(t) = \beta - b \cos t + a \sin t = \beta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - t_0) \end{cases}$$

où $\cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L = 2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathscr{L}$ quelconque, l'homothétique (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathscr{L}}$ a une longueur $\mathscr{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathscr{A}' = \left(\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\right) \times \mathscr{A}$. L'inégalité $\mathscr{A}' \leqslant \frac{\mathscr{L}'^2}{2\pi} = 2\pi$ s'écrit encore $\mathscr{A} \leqslant 2\pi \times \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi^2} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2 = \mathscr{A}$).

$$\boxed{\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi} \text{ avec égalité si et seulement si la courbe } (C) \text{ est un cercle.}}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

n° 9 : On pose déjà $u = xa$ et $v = yb$ de sorte que $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = ab$. On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\ dxdy = ab\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (a^2u^2 - b^2v^2)\ dudv.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} u^2\ dudv &= \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} v^2\ dudv = \frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (u^2+v^2)\ dudv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\times r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 dr\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{I = \frac{\pi ab(a^2 - b^2)}{4}.}$$

© Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.