SESSION 1993

SAINT-CYR

MATHEMATIQUES 1 - Epreuve commune

Options M, P, T, TA

PREMIÉRE PARTIE

1) Les polynômes L_0, ..., L_n sont $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Pour vérifier que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille libre.

On note tout d'abord que pour $(i,j)\in [\![0,n]\!]^2$, on a $L_i(x_j)=\delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. En effet, si $i\neq j$

$$L_i(x_j)=\frac{1}{\displaystyle\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}\times\prod_{k\neq i}(x_j-x_k)=\frac{1}{\displaystyle\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}\times\prod_{k\neq i,\ k\neq j}(x_j-x_k)\times(x_j-x_j)=0,$$

et si $i=j$,

$$L_i(x_j)=L_i(x_i)=\frac{1}{\displaystyle\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}\times\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)=1.$$

$$\boxed{\forall(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ L_i(x_j)=\delta_{i,j}.}$$

Soient alors λ_0, ..., λ_n $(n+1)$ réels.

$$\lambda_0L_0+\ldots+\lambda_nL_n=0\Rightarrow\forall i\in[\![0,n]\!],\ \lambda_0L_0(x_i)+\ldots+\lambda_iL_i(x_i)+\ldots+\lambda_nL_n(x_i)=0\Rightarrow\forall i\in[\![0,n]\!],\ \lambda_i=0.$$

La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et par suite

$$\boxed{\text{la famille }(L_i)_{0\leq i\leq n}\text{ est une base de }\mathbb{R}_n[X].}$$

2) • **Existence.** Le polynôme $L=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}y_iL_i$ est de degré au plus n car la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour $j\in[\![0,n]\!]$,

$$L(x_j)=\sum_{i=0}^{n}y_iL_i(x_j)=\sum_{i=0}^{n}y_i\delta_{i,j}=y_j.$$

• **Unicité.** Si L et M sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ coïncidant en x_0, ..., x_n, alors le polynôme $L-M$ est de degré infèrieur ou égal à n et a au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes. Le polynôme $L-M$ est donc nul ou encore $L=M$.

$$\boxed{\forall(y_0,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \exists!L\in\mathbb{R}_n[X]/\ \forall i\in[\![0,n]\!],\ L(x_i)=y_i\ \text{à savoir } L=\sum_{i=0}^{n}y_iL_i.}$$

3) D'après la question 2), $1=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}1\times L_i=\sum_{i=0}^{n}L_i$ et $X=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}x_iL_i$ (car $\deg(X)=1\leq n$).

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}L_i=1\text{ et }\sum_{i=0}^{n}x_iL_i=X.}$$

4) Le coefficient de X^n dans L vaut :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(z_i\frac{1}{\prod\limits_{j\neq i}(t_i-t_j)}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{t_i+a^2}\times\frac{1}{\prod\limits_{j\neq i}(t_i-t_j)}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t_i+a^2)}\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod\limits_{j\neq i}(t_j+a^2)}{\prod\limits_{j\neq i}(t_i-t_j)}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t_i+a^2)}\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod\limits_{j\neq i}(-a^2-t_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(t_i-t_j)}=\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t_i+a^2)}\sum_{i=0}^{n}L_i(-a^2)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t_i+a^2)}\text{ (d'après la question 3)).}$$

$$\boxed{\mathrm{dom}(L)=\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{i=0}^{n}(t_i+a^2)}.}$$

5) Le polynôme P est de degré au plus k et donc le polynôme $P(X^2)$ est de degré au plus $2k$. En particulier, les polynômes L et $P(X^2)$ sont dans $\mathbb{R}_{2k+1}[X]$.
D'autre part, si $0\leq i\leq k$, $L(x_i)=y_i=P(x_i^2)$ et si $k+1\leq i\leq 2k+1$,

$$L(x_i)=y_i=y_{2k+1-i}=P(x_{2k+1-i}^2)=P((-x_i)^2)=P(x_i^2).$$

Les polynômes L et $P(X^2)$ sont donc deux polynômes de degré au plus $2k+1$ coïncidant en les $2k+2$ réels $x_0,\ldots,x_{2k+1}$. On en déduit que ces polynômes sont égaux.

$$\boxed{L=P(X^2).}$$

En particulier, L est pair de même que son degré. Le degré de L est donc strictement plus petit que n.

6) Tout d'abord, puisque $\deg(P)\leq n$ et $\deg(Q)\leq n$ alors $\deg(S)\leq n+1$.
Ensuite, $S(a)=Q(a)=f(a)$, $S(b)=P(b)=f(b)$ et pour $i\in[\![1,n]\!]$,

$$S(x_i)=\frac{(x_i-a)P(x_i)-(x_i-b)Q(x_i)}{b-a}=\frac{x_i-a-x_i+b}{b-a}f(x_i)=f(x_i),$$

et on a montré que

$$\boxed{S\text{ interpole }f\text{ aux points }a,\ b,\ x_1,\ \ldots,\ x_n.}$$

DEUXIÈME PARTIE

1) Si Ψ est une fonction de classe C^{n+1} sur $[-1,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ s'annulant en $n+2$ points distincts de l'intervalle $[-1,1]$, le théorème de Rolle montre que la fonction Ψ s'annule au moins une fois dans chacun des $n+1$ intervalles ouverts définis par ces $n+2$ et donc s'annule en au moins $n+1$ points deux à deux distincts de l'intervalle $]-1,1[$. Plus généralement, par récurrence on a

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!],\ \Psi^{(k)}\text{ s'annule en au moins }(n+2-k)\text{ points deux à deux distincts de l'intervalle }]-1,1[.$$

En particulier, $\Psi^{(n+1)}$ s'annule en au moins $(n+2)-(n+1)$ points de l'intervalle $]-1,1[$ et donc au moins une fois dans $]-1,1[$.

Si P_n est le polynôme d'interpolation de f en $x_0,\ldots,x_n$, alors $f-P_n$ s'annule en $x_0,\ldots,x_n$ de même que $(x-x_0)\ldots(x-x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, quelque soit le choix de c dans $]-1,1[$. Par suite, si x est l'un des x_i (qui sont dans $[-1,1]$) n'importe quel réel c de l'intervalle $]-1,1[$ convient .

Soit maintenant x un réel de l'intervalle $[-1,1]$ distinct des x_i et fixé.
Pour $t\in[-1,1]$, on pose

$$\Psi(t) = f(t) - P_n(t) - A(t-x_0)...(t-x_n),$$

où $A = \dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}$ de sorte que l'on a aussi $\Psi(x) = 0$.

f est de classe C^{n+1} sur $[-1,1]$ et par suite, Ψ est de classe C^{n+1} sur $[-1,1]$. De plus, la fonction Ψ s'annule en les $n+2$ points deux à deux distincts de x, x_0, ..., x_n de l'intervalle $[-1,1]$. D'après le début de la question 1), $\Psi^{(n+1)}$ s'annule en un certain réel c de $]-1,1[$.

Enfin, P_n est un polynôme de degré au plus n et a donc une dérivée $(n+1)$-ème nulle. Par suite,

$$\psi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - A(n+1)!.$$

L'égalité $\Psi^{(n+1)}(c) = 0$ fournit alors l'égalité $f^{(n+1)}(c) - A(n+1)! = 0$ ou encore $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \exists c \in]-1,1[/\ f(x) - P_n(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.}$$

2) $\dfrac{1}{X^2+a^2} = \dfrac{1}{(X-ia)(X+ia)} = \dfrac{1}{2ia}\dfrac{(X+ia)-(X-ia)}{(X-ia)(X+ia)} = \dfrac{1}{2ia}\left(\dfrac{1}{X-ia} - \dfrac{1}{X+ia}\right)$ et donc

$$\left(\frac{1}{X^2+a^2}\right)^{(n+1)} = \frac{1}{2ia}\left(\left(\frac{1}{X-ia}\right)^{(n+1)} - \left(\frac{1}{X+ia}\right)^{(n+1)}\right) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2ia}\left(\frac{1}{(X-ia)^{n+2}} - \frac{1}{(X+ia)^{n+2}}\right).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2ia}\left(\frac{1}{(t-ia)^{n+2}} - \frac{1}{(t+ia)^{n+2}}\right).}$$

3) Si x est l'un des x_i, c'est clair. Sinon, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$. Mais alors

$$\begin{aligned}
|(x-x_0)\dots(x-x_n)| &= (x-x_0)\dots(x-x_k)(x_{k+1}-x)\dots(x_n-x)\\
&\leq (x_{k+1}-x_0)\dots(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_k)...(x_n-x_k)\\
&= \frac{2(k+1)}{n} \times \frac{2k}{n}\dots\times\frac{2\times 1}{n}\times\frac{2\times 1}{n}\times\dots\times\frac{2\times(n-k)}{n}\\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times 1\times 2\times\dots\times k\times(k+1)\times 1\times 2\times(n-k)\\
&\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times 1\times 2\times\dots\times k\times(k+1)\times(k+2)\times(k+3)\times\dots\times(n+1)\\
&= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ |(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}.}$$

4) Soit $t \in [-1,1]$. D'après la question 2),

$$\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(t)| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2ia}\left(\frac{1}{(t-ia)^{n+2)}} - \frac{1}{(t+ia)^{n+2}}\right)\right|\\
&\leq \frac{(n+1)!}{2a}\left(\frac{1}{|t-ia|^{n+2}} + \frac{1}{|t+ia|^{n+2}}\right) = \frac{(n+1)!}{a}(t^2+a^2)^{-(n+2)/2}\\
&\leq \frac{(n+1)!}{a}(a^2)^{-(n+2)/2} = \frac{(n+1)!}{a^{n+3}}.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après les questions 1) et 3), pour x dans $[-1,1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}} \times \frac{(n+1)!}{a^{n+3}} \times \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{a^{n+3}n^{n+1}},$$

ou encore

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-Pn(x)|\leq\frac{2^{n+1}(n+1)!}{a^{n+3}n^{n+1}}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons alors $u_n=\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{a^{n+3}n^{n+1}}$. La suite (u_n) est strictement positive et de plus pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{a}\times(n+2)\times\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\frac{2}{a}\times\frac{n+2}{n+1}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}.$$

Cette dernière expression tend vers $\dfrac{2}{ae}$ qui est strictement plus petit que 1. D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. Finalement, $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)-Pn(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc

$$\boxed{\text{si } a>\frac{2}{e}, \text{ la suite des polynômes } (P_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [-1,1].}$$

TROISIÈME PARTIE

1) Posons $n=2k+1$. Tout d'abord, les x_i sont deux à deux distincts puis, pour $i\in[\![0,k]\!]$,

$$x_{n-i}=-1+2\frac{n-i}{n}=1-\frac{i}{n}=-x_i,$$

et d'autre part $y_{n-i}=y_i$ puisque f est paire.

D'après la question I)5), le polynôme $Q(x)=(x^2+a^2)(f(x)-P_n(x))=1-(x^2+a^2)P_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)+2=n+1$.

Mais P_n interpole f en les $n+1$ points deux à deux distincts $x_0,\ldots,x_n$ et donc le polynôme Q qui est de degré au plus $n+1$ admet les $n+1$ réels deux à deux distincts $x_0,\ldots,x_n$, pour racines. On en déduit que le polynôme Q est de degré $n+1$ exactement et donc que

$$Q=\mathrm{dom}(Q)\times(X-x_0)\ldots(X-x_n).$$

Maintenant, toujours d'après la question I)5), $P_n=P(X^2)$ où P est le polynôme de degré inférieur ou égal à k qui vérifie $P(x_i^2)=f(x_i)$ pour i élément de $[\![0,k]\!]$ ou encore, en posant $t_i=x_i^2$ pour i élément de $[\![0,k]\!]$

$$\forall i\in[\![0,k]\!],\ P(t_i)=\Phi(t_i),$$

Φ étant la fonction définie à la question I)4). P est donc le polynôme qui interpole Φ en les $k+1$ réels deux à deux distincts $t_0,\ldots,t_k$. Son coefficient dominant est donc

$$(-1)^k\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k}(t_i+a^2)}\text{ ou encore }(-1)^k\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k}(x_i^2+a^2)}.$$

Enfin, puisque $Q=1-(X^2+a^2)P(X^2)$, on domQ $=-$domP et donc :

$$\boxed{Q=(-1)^k\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k}(x_i^2+a^2)}(X-x_0)...(X-x_n).}$$

2) a) Soient $x\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ et n un entier naturel non nul.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{n}<x-\frac{1}{2}\text{ et }\frac{1}{n}<1-x\Leftrightarrow n\geq\mathrm{Max}\left\{E\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)+1,E\left(\frac{1}{1-x}\right)+1\right\}.$$

Ainsi, en posant $N = \text{Max}\left\{E\left(\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{2}}\right)+1, E\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+1\right\}$, N est un entier naturel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < x < 1-\frac{1}{n}.$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à N.

• Si $E(nx) \leq nx < E(nx)+\dfrac{1}{n}$, alors

$$E(nx)+1+\frac{1}{n} \leq nx+1+\frac{1}{n} < nx+1+\frac{2}{n} < nx+2x = (n+2)x \text{ et}$$
$$(n+2)x = nx+2x < E(nx)+\frac{1}{n}+2-\frac{2}{n} = E(nx)+2-\frac{1}{n}.$$

• Si $E(nx)+1-\dfrac{1}{n} \leq nx < E(nx)+1$ alors

$$E(nx)+2+\frac{1}{n} \leq nx+1+\frac{2}{n} < nx+2x = (n+2)x \text{ et } (n+2)x = nx+2x < E(nx)+1+2-\frac{2}{n} < E(nx)+3-\frac{1}{n}.$$

Supposons maintenant qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers impairs n strictement supérieurs à N tels que

$$\frac{1}{n} < nx - E(nx) < 1-\frac{1}{n}.$$

Il existe alors un entier $N_1 > N$ tel que tous les entiers impairs $n \geq N_1$ vérifient

$$E(nx) \leq nx \leq E(nx)+\frac{1}{n} \text{ ou } E(nx)+1-\frac{1}{n} \leq nx < E(nx)+1.$$

Soit n un entier impair supérieur à N_1.

- Si n vérifie $E(nx) \leq nx \leq E(nx)+\dfrac{1}{n}$ alors $E(nx)+1 < E(nx)+1+\dfrac{1}{n} < (n+2)x < E(nx)+2-\dfrac{1}{n} < E(nx)+2$ et en particulier $E((n+2)x) = E(nx)+1$ puis $\dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n} < (n+2)x - E((n+2)x) < 1-\dfrac{1}{n} < 1-\dfrac{1}{n+2}$ ce qui est exclu puisque $n+2$ est encore un entier impair supérieur à N_1.
- De même, si n vérifie $E(nx)+1-\dfrac{1}{n} \leq nx < E(nx)+1$ alors $E(nx)+2 < E(nx)+2+\dfrac{1}{n} < (n+2)x < E(nx)+3-\dfrac{1}{n}$ $< E(nx)+3$ et en particulier, $E((n+2)x) = E(nx)+2$ puis $\dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n} < (n+2)x - E((n+2)x) < 1-\dfrac{1}{n} < 1-\dfrac{1}{n+2}$ ce qui est exclu.

On obtient une contradiction dans tous les cas et donc

$$\boxed{\text{il existe une infinité d'entiers impairs } n > N \text{ tels que } \frac{1}{n} < nx - E(nx) < 1-\frac{1}{n}.}$$

Soit n un tel entier impair et k un entier naturel élément de $[\![0, n]\!]$. On note que l'on a $nx < n$ et donc aussi $E(nx) < n$ ou encore $E(nx) \leq n-1$. On note aussi que l'encadrement précédent s'écrit encore

$$\frac{1}{n^2}+\frac{E(nx)}{n} < x < \frac{E(nx)}{n}-\frac{1}{n^2}.$$

Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

- Si $0 \leq k \leq E(nx)$, on a

$$x-\frac{k}{n} > \frac{1}{n^2}+\frac{E(nx)-k}{n} \geq \frac{1}{n^2} \text{ et donc } \left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{n^2}.$$

- Si $E(nx)+1 \leq k \leq n$, on a

$$x-\frac{k}{n} < \frac{E(nx)+1-k}{n}-\frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{n^2} \text{ et encore une fois } \left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{n^2}.$$

On a ainsi démontré qu'il existe une infinité d'entiers impairs n tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{n^2}$. On ordonne alors ces entiers suivant une suite strictement croissante $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Soit maintenant k un élément de $[\![0, n_p]\!]$. On a alors $-\frac{1}{2} < x - 1 \leq x - \frac{k}{n_p} \leq x < 1$ et donc $\left|x - \frac{k}{n_p}\right| < 1$. En résumé,

$$\forall k \in [\![0, n_p]\!],\ \frac{1}{n^2}\left|x - \frac{k}{n_p}\right| < 1.$$

Mais alors, pour $k \in [\![0, n_p]\!]$,

$$\frac{1}{n_p}\ln\frac{1}{n_p^2} < \frac{1}{n_p}\ln\left|x - \frac{1}{n_p}\right| < 0$$

et finalement

$$\forall k \in [\![0, n_p]\!],\ \left|\frac{1}{n_p}\ln\left|x - \frac{1}{n_p}\right|\right| < 2\frac{\ln(n_p)}{n_p}.$$

Maintenant, quand p tend vers $+\infty$, n_p tend vers $+\infty$ puis $2\frac{\ln(n_p)}{n_p}$ tend vers 0. On a montré que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{N}/\ \forall p \in \mathbb{N},\ [p \geq A \Rightarrow \forall k \in [\![0, n_p]\!],\ \left|\frac{1}{n_p}\ln\left|x - \frac{1}{n_p}\right|\right| < \varepsilon].}$$

b) x est toujours un réel donné de l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$. L'application $u \mapsto \ln|x - u|$ est continue sur $[-1, x[\cup]x, 1]$ et est négligeable au voisinage de x devant $\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}$. L'application $u \mapsto \ln|x-u|$ est donc intégrable sur $[-1, x[$ et sur $]x, 1]$. On en déduit que $\int_{-1}^{1}\ln|x-u|\ dx$ existe.

On a alors

$$\begin{aligned}I(x) &= \int_{-1}^{x}\ln(x-u)\ du + \int_{x}^{1}\ln(u-x)\ du = [(u-x)\ln(x-u) - u]_{-1}^{x} + [(u-x)\ln(u-x) - u]_{x}^{1}\\ &= -2 + (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[,\ \int_{-1}^{1}\ln|x-u|\ du = -2 + (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x).}$$

c) On a $0 \leq x - x_q < x_{q+1} - x_q = \frac{2}{n_p}$. Comme $\frac{2}{n_p}$ tend vers 0, x_q tend vers x quand n_p tend vers l'infini (ou encore quand p tend vers l'infini). Ensuite, puisque $x_{q+1} - x_q$ tend vers 0, x_{q+1} tend vers x quand n_p tend vers l'infini.

La fonction $u \mapsto \ln|x-u|$ est décroissante sur $]-1, x[$ et croissante sur $]x, 1[$. Par suite,

- pour $i \in [\![0, q-1]\!]$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\ln|x-u|\ du \leq (x_{i+1} - x_i)\ln|x - x_i| = \frac{2}{n_p}\ln|x - x_i|$$

et en additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\int_{-1}^{x_q}\ln|x-u|\ du \leq \frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{q-1}\ln|x - x_i|.$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{q-1}\ln|x - x_i| &= \frac{2}{n_p}\ln(1+x) + \sum_{i=1}^{q-1}(x_{i+1} - x_i)\ln|x - x_i| \leq \frac{2}{n_p}\ln(1+x) + \sum_{i=1}^{q-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\ln|x-u|\ du\\ &= \frac{2}{n_p}\ln(1+x) + \int_{-1}^{x_{q-1}}\ln|x-u|\ du.\end{aligned}$$

En résumé,

$$\int_{-1}^{x_q} \ln|x-u|\,du \leq \frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{q-1} \ln|x-x_i| \leq \frac{2}{n_p}\ln(1+x) + \int_{-1}^{x_{q-1}} \ln|x-u|\,du.$$

Maintenant, puisque $x_{q-1} = x_q - \dfrac{2}{n_p}$, x_{q-1} tend vers x comme x_q. Donc, $\displaystyle\int_{-1}^{x_q} \ln|x-u|\,du$ et $\dfrac{2}{n_p}\ln(1+x)+\displaystyle\int_{-1}^{x_{q-1}} \ln|x-u|\,du$ tendent vers $\displaystyle\int_{-1}^{x} \ln|x-u|\,du$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{2}{n_p}\sum_{i=0}^{q-1} \ln|x-x_i| \text{ tend vers } \int_{-1}^{x} \ln|x-u|\,du \text{ quand } n_p \text{ tend vers l'infini.}$$

On montre de même que $\dfrac{2}{n_p}\displaystyle\sum_{i=q+2}^{n_p} \ln|x-x_i|$ tend vers $\displaystyle\int_{-1}^{x} \ln|x-u|\,du$ quand n_p tend vers l'infini.

Ensuite, $\dfrac{2}{n_p}\ln|x-x_q| = \dfrac{2}{n_p}\ln|x-\dfrac{2q-n_p}{n_p}|$. L'encadrement $x_q \leq x < x_{q+1}$ fournit $2q-n_p \leq n_p x < n_p$ et $2q-n_p > n_p x - 2 > \dfrac{1}{2}n_p - 2 > 0$ pour $n_p \geq 5$. Donc, $2q-n_p$ est un entier de $[\![0, n_p]\!]$ pour $n_p \geq 5$ et la fin de la question 2)a) montre que $\dfrac{2}{n_p}\ln|x-x_q|$ tend vers 0 quand n_p tend vers l'infini. On montre de même que $\dfrac{2}{n_p}\ln|x-x_{q+1}|$ tend vers 0 quand n_p tend vers l'infini.

En résumé, quand n_p tend vers l'infini, $\dfrac{2}{n_p}\displaystyle\sum_{i=0}^{q-1} \ln|x-x_i|$ tend vers $\displaystyle\int_{-1}^{x} \ln|x-u|\,du$, $\dfrac{2}{n_p}\ln|x-x_q|$ et $\dfrac{2}{n_p}\ln|x-x_{q+1}|$ tendent vers 0 et $\dfrac{2}{n_p}\displaystyle\sum_{i=q+2}^{n_p} \ln|x-x_i|$ tend vers $\displaystyle\int_{-1}^{x} \ln|x-u|\,du$. Finalement

$$\boxed{S_{n_p} \text{ tend vers } I(x) \text{ quand } n_p \text{ tend vers l'infini.}}$$

3) a) La fonction $u \mapsto \ln(u^2+a^2)$ est continue sur le segment $[-1,1]$ et $x_0 = -1 < x_1 = -1 + \dfrac{2}{n_p} < \ldots < x_{n_p} = 1$ est une subdivision à pas constant de l'intervalle $[-1,1]$ dont le pas $\dfrac{2}{n_p}$ tend vers 0 quand n_p tend vers l'infini. On sait alors que la somme de Riemann $\Sigma_{n_p}(a)$ tend, quand n_p tend vers l'infini vers $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(x^2+a^2)\,dx$. Or

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \ln(x^2+a^2)\,dx &= \left[x\ln(x^2+a^2)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{x^2+a^2}\,dx = 2\ln(1+a^2) - \int_{-1}^{1}\left(2 - 2a^2\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx \\ &= 2\ln(1+a^2) - 4 + 2a\left[\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}\right]_{-1}^{1} = 2\ln(1+a^2) - 4 + 4a\operatorname{Arctan}\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\Sigma_{n_p}(a) \text{ tend vers } 2\ln(1+a^2) - 4 + 4a\operatorname{Arctan}\frac{1}{a} \text{ quand } n_p \text{ tend vers l'infini.}}$$

b) D'après la question III)1), $f(x) - P_n(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k}(x_i^2+a^2)}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ où $k = \dfrac{n_p-1}{2}$ et donc

$$\frac{2}{n_p}\ln|f(x) - P_{n_p}(x)| = -\frac{2}{n_p}\ln(x^2+a^2) + S_{n_p}(x) - \frac{1}{2}\Sigma_{n_p}(a),$$

(car $\displaystyle\prod_{i=0}^{k}(x^2+a^2) = \sqrt{\prod_{i=0}^{n_p}(x^2+a^2)}$). On en déduit que $\dfrac{2}{n_p}\ln|f(x)-P_{n_p}(x)|$ tend vers $-2+(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x) - \ln(1+a^2) + 2 - 2a\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{a}$ quand n_p tend vers l'infini.

c) Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\forall a > 0,\ l(a) = 2\ln 2 - \ln(1+a^2) - 2a\,\text{Arctan}\,\frac{1}{a}.}$$

d) Si pour tout x dans $]-1,1[$, la suite $|f(x) - P_n(x)|$ tend vers 0 alors la suite $\ln|f(x) - P_{n_p}(x)| = \dfrac{n_p}{2}u_{n_p}(x)$ tend vers $-\infty$ quand n_p tend vers $+\infty$. En particulier, pour tout x dans $]-1,1[$, $u_{n_p}(x)$ est négatif ou nul pour n_p suffisament grand et quand n_p tend vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ u(x) \leq 0,$$

ce qui impose $l(a) \leq 0$. Donc

$$\boxed{\text{si } l(a) > 0, \text{ la suite } (P_n) \text{ ne converge même pas simplement vers } f \text{ sur } [-1,1].}$$

On note que quand a tend vers 0, $l(a)$ tend vers $2\ln 2 > 0$ et donc pour a suffisament petit $l(a) > 0$.

QUATRIÈME PARTIE

1) • Pour $n = 1$, le polynôme (de degré infèrieur ou égal à 1) qui interpole f en x_0 et x_1 est :

$$L = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \text{ et le coefficient de } x \text{ vaut } \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f_2[x_0, x_1].$$

• Soit $n \geq 1$. En supposant que le coefficient de x^n des polynômes P et Q qui interpolent f en $x_0, \ldots, x_n$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ respectivement sont $f_{n+1}[x_0, \ldots, x_n]$ et $f_{n+1}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, puisque d'après I)6), le polynôme qui interpole f en $x_0, \ldots, x_{n+1}$ est

$$S = \frac{(x - x_0)P - (x - x_{n+1})Q}{x_0 - x_{n+1}},$$

le coefficient de x^{n+1} du polynôme qui interpole f en $x_0, \ldots, x_{n+1}$ est

$$\frac{f_{n+1}[x_0, \ldots, x_n] - f_{n+1}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{x_0 - x_{n+1}} = f_{n+2}[x_0, ..., x_{n+1}].$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Si L est le polynôme (de degré inférieur ou égal à n) qui interpole f aux points $x_0, \ldots, x_n$, L interpole encore f en $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ pour toute permutation σ des indices $0, 1, \ldots, n$. Le coefficient de x^n de L est donc invariant par permutation des x_i ou encore $f_{n+1}[x_0, \ldots, x_n]$ est invariant par permutation des x_i.

3) Montrons le résultat par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, soit $P = f_1[x_0] + f_2[x_0, x_1](X - x_0)$. Alors,

$$P = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(X - x_0).$$

Ainsi, P est un polynôme de degré au plus 1 vérifiant $P(x_0) = f(x_0)$ et $P(x_1) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = f(x_1)$. P est donc effectivement le polynôme de degré au plus 1 qui interpole f en x_0 et x_1.

• Soit $n \geq 1$, supposons que le polynôme qui interpole f en $x_0, \ldots, x_n$ soit le polynôme

$$L_n = f_1[x_0] + \ldots + f_{n+1}[x_0, \ldots, x_n](X - x_0)...(X - x_{n-1}).$$

Le polynôme L_{n+1} (qui interpole f en $x_0, \ldots, x_{n+1}$) coïncide avec L_n en les $n+1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$ ou encore $L_{n+1} - Ln$ est un polynôme de degré au plus $n+1$ qui s'annule en les $n+1$ réels deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$. Par suite, il existe donc une constante A_{n+1} telle que :

$$L_{n+1} = L_n + A_{n+1}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

Enfin, puisque le coefficient de X^{n+1} dans L_{n+1} est $f_{n+2}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ et que $\deg(L_n) \leq n$, $A_{n+1} = f_{n+2}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ ce qui montre que

$$L_{n+1} = L_n + f_{n+2}[x_0, \ldots, x_{n+1}](X - x_0)...(X - x_n) = f_1[x_0] + ... + f_{n+2}[x_0, .., x_{n+1}](X - x_0)...(X - x_n).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = f_1[x_0] + \ldots + f_{n+1}[x_0, \ldots, x_n](X - x_0)\ldots(X - x_{n-1}).}$$

Commentaires.

• Ce problème analyse de manière très exhaustive les polynômes de Lagrange. Un résultat classique manque néanmoins : dans la partie I, question 3, l'énoncé demande calculer $\sum_{i=0}^{n} L_i$ et $\sum_{i=0}^{n} x_i L_i$. L'énoncé aurait pu demander plus généralement la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i,\ k \in [\![0, n]\!].$$

Puisque, pour $k \in [\![0, n]\!]$, X^k est dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'écriture générale d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ fournie à la question 2) de la partie I) permet d'écrire

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i.}$$

Ce résultat signifie que la matrice de passage de la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ à la base canonique $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice de Vandermonde de la famille $(x_0, \dots, x_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

• L'énoncé originel contenait une dernière question (IV)4)) qui demandait une traduction en Pascal de l'algorithme d'écrit dans cette partie IV. Cette question n'a pas été reproduite ici.

