

1 Topologie

1) **Normes, normes équivalentes** Une norme sur l'espace vectoriel E est une application N de E dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, N(x) &\geq 0. \\ \forall x \in E, (N(x) = 0 &\Rightarrow x = 0) \text{ (axiome de séparation)}. \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) &= |\lambda|N(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) &\leq N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}. \end{aligned}$$

Normes équivalentes. Les normes N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe deux réels **strictement** positifs α et β tel que $\forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$. Il revient au même de dire que la fonction $\frac{N'}{N}$ est bornée sur $E \setminus \{0\}$.

Théorème. Si E est de dimension finie sur \mathbb{K} , toutes les normes sont équivalentes.

2) **Voisinage** Un voisinage de x est une partie de l'espace vectoriel normé (E, N) qui contient une boule ouverte non vide de centre x .

L'ensemble des voisinages de x se note $\mathcal{V}(x)$. Si V est une partie de E ,

$$(V \in \mathcal{V}(X) \Leftrightarrow \exists r > 0 / B_o(x, r) \subset V).$$

Théorème. Une réunion quelconque de voisinage de x est un voisinage de x .

Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x .

3) **Ouverts, intérieur.**

Ouvert. Un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) est soit \emptyset , soit une partie non vide de E voisinage de chacun de ses points.

Si O est une partie non vide de E ,

$$(O \text{ est ouvert} \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists r > 0 / B_o(x, r) \subset O).$$

Théorème. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Intérieur. Un élément x de $A \neq \emptyset$ est intérieur à A si et seulement si A est voisinage de x

$$(\forall x \in E), (x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x)).$$

L'intérieur d'une partie non vide A est l'ensemble des points de A dont A est voisinage.

Théorème. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Théorème. A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

4) **Fermés, adhérence**

Fermé. A est fermé si et seulement si le complémentaire de A est ouvert.

Théorème. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème (caractérisation séquentielle des fermés). Une partie non vide A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge dans A .

Adhérence. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A

$$(\forall x \in E, x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset).$$

L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A .

Théorème. \overline{A} est le plus petit fermé contenant A .

Théorème. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Théorème. x est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergente de limite x .

\emptyset et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

5) Compacts Une partie non vide K de E est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K . Sinon, \emptyset est compact.

Théorème. Si K est compacte, K est fermée et bornée.

Théorème (de BOREL-LEBESGUE). Si (E, N) est un evn de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.

Théorème (de BOLZANO-WEIERSTRASS). Si (E, N) est un evn de dimension finie, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

6) Espaces complets L'evn (E, N) est complet si et seulement si toute suite de CAUCHY d'éléments de E converge dans E . Un evn complet est un espace de BANACH.

Théorème. Si (E, N) est un espace de dimension finie, alors (E, N) est un espace de BANACH.

2 Fonctions

2.1 Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires. f est une fonction d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') . Si f est continue sur E , l'image d'un connexe par arcs de E est un connexe par arcs de E' .

En particulier, si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et est continue sur \mathbb{R} , l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par f est un intervalle de \mathbb{R} .

Théorème (images réciproques d'ouverts ou de fermé). f est une application d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') .

f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E', N') est un ouvert de D , c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de E avec D .

f est continue sur D si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (E', N') est un fermé de D , c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de E avec D .

Théorème (image continue d'un compact). f est une application d'une partie D d'un evn (E, N) dans un evn (E', N') . Si f est continue sur D , l'image directe d'un compact de D est un compact de (E', N') .

Théorème de HEINE. Si f est continue sur un compact, alors f est uniformément continue sur ce compact.

Théorème (continuité de la norme). L'application $N : (E, N) \rightarrow (\mathbb{R}, |||)$ est continue.

$$x \mapsto N(x)$$

Théorème (continuité d'une application linéaire). f est une application linéaire de $(E, |||_E)$ dans $(F, |||_F)$.

f est continue sur E si et seulement si f est continue en 0 si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, |||f(x)|||_F \leq k |||x|||_E$ si et seulement si f est lipschitzienne.

Dans ce cas, la norme subordonnée à N et N' est

$$|||f||| = \sup \left\{ \frac{|||f(x)|||_F}{|||x|||_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\} = \sup \{ |||f(x)|||_F, |||x|||_E \leq 1 \} = \sup \{ |||f(x)|||_F, |||x|||_E = 1 \}.$$

$||| |||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui est sous-multiplicative.

Théorème. Si E est de dimension finie, toute application linéaire, forme linéaire, application multilinéaire... est continue sur E .

Conséquence : les sev d'un evn de dimension finie sont fermés.

2.2 Dérivation

Théorème (de ROLLE). f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Le théorème de ROLLE et le théorème des accroissements finis sont faux pour les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} ou les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Théorème. f est une application définie sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si f est continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b]$ et si f' a une limite réelle ou complexe en a , alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

Formule (de TAYLOR-LAPLACE). Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Inégalité des accroissements finis. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , dérivable sur I . On suppose que $|f'|$ est bornée sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \times \sup_I |f'|.$$

Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE. Soit f une application définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $n+1$ fois dérivable sur I . On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est bornée sur I . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{\sup_I |f^{(n+1)}| \times (b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

2.3 Intégration

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors, pour tout x_0 de I , la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Plus généralement, si f est continue par morceaux sur I , F est continue sur I , dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur de I et pour x intérieur à I , $F'_g(x) = f(x^-)$ et $F'_d(x) = f(x^+)$.

3 Séries numériques

Règle de d'ALEMBERT. (u_n) est une suite complexe, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$.

- Si $0 \leq \ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes. Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ converge et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Critère spécial aux séries alternées (ou théorème de LEIBNIZ). Soit (u_n) une suite réelle alternée en signe, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge.

De plus, S , S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et leur valeur absolue est majorée par la valeur absolue de leur premier terme. Enfin, S est encadrée par deux sommes partielles consécutives.

Théorème (séries télescopiques). Soit (a_n) une suite complexe. La suite (a_n) et la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ sont de même nature.

Comparaison séries-intégrales. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ converge.

En particulier, la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème (somme des relations de comparaison). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles strictement positives telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général b_n converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes).

Si la série de terme général a_n diverge, alors la série de terme général b_n diverge et

$$\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n b_k$$

(règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes).

Résultats analogues en remplaçant \sim par $o(\)$ ou $O(\)$.

Théorème de FUBINI. Soit $(u_{i,j})$ une suite complexe double. Si Pour tout i , la série de terme général $u_{i,j}$ est absolument convergente et que $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right) < +\infty$, alors la suite $(u_{i,j})$ est sommable et de plus,

$$\sum_{(i,j)} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

Ne font pas partie du cours, mais constituent des grands classiques d'écrit : la règle de RAABE-DUHAMEL (amélioration de la règle de d'ALEMBERT pour les séries numériques) et la transformation et la règle d'ABEL (pour une série du type $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$)

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

1) Convergence simple, uniforme La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f si et seulement si, pour chaque x de D , la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers le nombre $f(x)$.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur D si et seulement si la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Interspersion des limites

Théorème d'interspersion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini, complexe...).

Si (f_n) converge uniformément vers f sur D et si chaque f_n a une limite $\ell_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a , alors :

a) f a une limite quand x tend vers a ;

b) la suite (ℓ_n) converge ;

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$.

(c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$.)

3) Continuité.

Théorème. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur D et si chaque f_n est continue sur D , alors f est continue sur D (une limite uniforme de fonctions continues est continue).

4) Dérivation.

Théorème. Si

a) la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur D ;

b) chaque fonction f_n est dérivable sur D ;

c) la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur D (vers sa limite).

Alors, f est dérivable sur D et $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$ (c'est-à-dire $\frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{d}{dx} f_n)$.)

Théorème (généralisation). Si

- la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur D ;
 - chaque f_n est de classe C^p , $p \geq 1$, sur D ;
 - les suites des dérivées $(f_n^{(k)})$, $1 \leq k \leq p$, convergent toutes uniformément sur D (vers leur limite)
- Alors, f est de classe C^p sur D et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$.

5) Intégration

Théorème (convergence uniforme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :

- f est continue par morceaux sur $[a, b]$;
 - la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge ;
 - $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.
- (c'est-à-dire $\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$).

Théorème de convergence dominée. (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

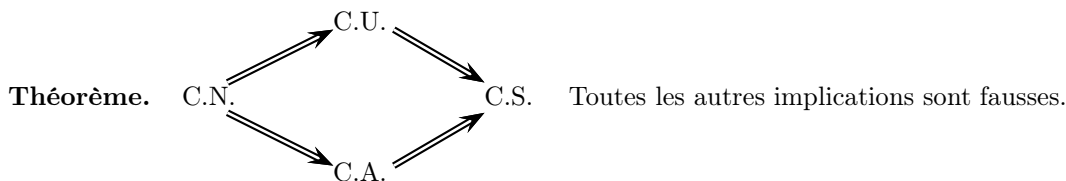
Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur

$$I \text{ et } \int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

4.2 Séries de fonctions

1) Convergence simple, uniforme, absolue, normale

- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D vers S si et seulement si, pour chaque x de D , la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers $S(x)$.
- La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers S si et seulement si la suite $(\|R_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- La série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D si et seulement si, pour chaque x de D , la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.
- La série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D (vers S) si et seulement si la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.



2) Interspersion des limites

Théorème d'interspersion des limites. a est adhérent à D (a réel, infini, complexe...).

Si la série de fonction de terme général f_n converge uniformément vers S sur D et si chaque f_n a une limite $l_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a , alors :

- S a une limite quand x tend vers a ;
 - la série numérique de terme général l_n converge ;
 - $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$.
- (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$).

3) Continuité

Théorème. Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers S sur D et si chaque f_n est continue sur D , alors S est continue sur D .

4) Dérivation

Théorème de dérivation terme à terme. Si

- a) la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D ;
- b) chaque f_n est dérivable sur D ;
- c) la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur D ,

alors, S est dérivable sur D et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ (c'est-à-dire $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (f_n)$).

Théorème (généralisation). Si

- a) la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers S sur D ;
- b) chaque f_n est de classe C^p , $p \geq 1$ sur D ;
- c) les séries de termes généraux $(f_n^{(k)})$, $1 \leq k \leq p$, convergent toutes uniformément sur D ,

alors, S est de classe C^p sur D et $\forall k \in [[1, p]]$, $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Revoir l'étude de la fonction ζ de RIEMANN.

5) Intégration terme à terme

Théorème (convergence uniforme sur un segment). Si chaque f_n est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et si la série de terme général f_n converge uniformément vers S sur $[a, b]$, alors :

- a) S est continue par morceaux sur $[a, b]$;
- b) la série de terme général $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge ;

$$c) \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Théorème de convergence dominée. (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^n f_k| \leq \varphi$ (hypothèse de domination),

alors S est intégrable sur I et $\int_I S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx$.

Théorème. Si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I , si la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$, alors S est intégrable sur I et $\int_I S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

5 Séries entières

1) **Rayon de convergence** $R_a = \sup\{r \in [0, +\infty[\mid (|a_n|r^n) \text{ bornée}\}$.

2) **Convergence normale**

Théorème. La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout $[-r, r]$ (resp. tout disque fermé de rayon r) où $r < R_a$.

Théorème. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Idem pour primitive par intégration terme à terme.

Les différents rayons de convergence considérés sont égaux. De plus, la somme d'une série entière est égale à la somme de sa série de TAYLOR :

$$\forall x \in]-R_a, R_a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

6 Séries de FOURIER

1) **Coefficients de FOURIER et série de FOURIER** f est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodique à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

coefficients de FOURIER sous forme trigonométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

coefficients de FOURIER sous forme exponentielle

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Si f est paire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0.$$

Si f est impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

La série de FOURIER trigonométrique de f est

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)).$$

La série de FOURIER exponentielle de f est

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}.$$

2) Théorème de DIRICHLET

Théorème. Si f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodique, alors la série de FOURIER de f converge en tout réel x vers $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

Corollaire Si f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux et 2π -périodique, alors la série de FOURIER de f converge simplement vers f sur \mathbb{R} .

3) Formule de PARSEVAL

Théorème Si f est continue par morceaux et 2π -périodique, alors

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

4) Convergence normale

Si f est de classe C^1 par morceaux,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f') = n b_n(f) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f') = -n a_n(f).$$

$$a_0(f') = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = i n c_n(f).$$

$$c_0(f') = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f').$$

Théorème. Si f est continue, de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique la série de FOURIER de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Théorème. Si f est de classe C^k sur \mathbb{R} alors la suite $(c_n(f))$ est négligeable devant la suite $(|n|^{-k})$ quand n tend vers $\pm\infty$ et les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ sont négligeables devant n^{-k} quand n tend vers $+\infty$.

5) Fonctions T-périodiques

On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

coefficients de FOURIER trigonométriques

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

coefficients de FOURIER exponentielles

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

La série de **FOURIER trigonométrique** de f est

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x)).$$

La série de **FOURIER exponentielle** de f est

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega x}.$$

Formule de PARSEVAL

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

7 Intégrales dépendant d'un paramètre

I est une partie de \mathbb{R} et J est un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

$f: I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de deux variables, définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_J f(x, t) dt$.

Pas de théorème d'interversion des limites

Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. Si

- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est définie et continue sur I.

Théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de LEIBNIZ) Si pour tout x de I, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J et intégrable sur J, et si f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent, c'est-à-dire :

- pour tout x de I, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Théorème de dérivation sous le signe somme (généralisation) Si pour tout x de I , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J et intégrable sur I , et si f admet des dérivées partielles $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}$, $1 \leq i \leq k$, vérifiant :

- a) pour tout x de I et tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ,
- b) pour tout t de J et tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}f(x, t)$ est continue sur I ,
- c) il existe des fonctions φ_i continues par morceaux, positives et intégrable sur J telle que, pour tout $(x, t) \in I \times J$ et tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,
 $|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)| \leq \varphi_i(t)$.

Alors, la fonction F est de classe C^k sur I et $\forall x \in I, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, F^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$.

Revoir l'étude de la fonction Γ .

8 Equations différentielles

Théorème de CAUCHY Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ à savoir :

$$\forall x \in I, f(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \text{ où } A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Théorème de CAUCHY. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir

$$\forall t \in I, X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du.$$

Théorème de CAUCHY. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = AX + B$ sur I vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$.

Théorème de CAUCHY. Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe une et une seule solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ prenant la valeur y_0 en x_0 . De plus, l'intervalle de définition de cette solution maximale est ouvert.