SESSION 1995

E.N.A.C. Ingénieurs

FILIERE M

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES. OPTION

- I -

$\mathbb{R}[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on désigne par E le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ ayant pour éléments les polynômes P tels que

$$\int_0^1 P(x)\,dx = 0.$$

On appelera D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme P sa dérivée P', et d la restriction de D à E.

a) 1) Montrer que d est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. On désignera par φ l'isomorphisme réciproque : $\varphi = d^{(-1)}$.

2) Vérifier que pour tout élément Q de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = \varphi(Q)$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)Q(t)\,dt.$$

b) On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \varphi(B_n).$$

1) Expliciter B_1 et B_2.

2) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $B_n(0) = B_n(1)$.

c) A tout entier naturel n, on associe le polynôme P_n défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$

1) Pour tout entier naturel n, exprimer P'_{n+1} en fonction de P_n.

2) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $P_{n+1} = \varphi(P_n)$.

3) En déduire l'expression de $B_n(1-x)$ en fonction de $B_n(x)$.

d) Dans cette question, p est un entier naturel non nul. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$p^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right) = Q_n(x).$$

1) Montrer que : $Q_{n+1} = \varphi(Q_n)$.

2) En déduire que l'on a pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = p^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1} B_n\left(\frac{x+j}{p}\right).$$

e) A tout entier n de $\mathbb{N}$, on associe le polynôme R_n défini par :

$$R_n = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x).$$

1) Démontrer que l'on a pour tout n : $\forall x \in \mathbb{R},\ R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\,dt.$

2) Déterminer le polynôme R_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

3) En déduire que pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, on a :

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = n!\,(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1)).$$

- II -

Les notations restant celles de la partie I, on pose $B_n(0) = b_n$.

a) 1) Démontrer que l'on a pour tout n dans $\mathbb{N}$: $B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{n-j} \frac{x^j}{j!}$.

2) En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n-j}}{(j+1)!}, \text{ avec } b_0 = 1.$$

3) Montrer que, pour tout k entier naturel non nul, on a $b_{2k+1} = 0$.

b) Utilisant le résultat de 1.d), donner les expressions en fonction de n et b_n de :

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right);\quad B_n\left(\frac{1}{3}\right);\quad B_n\left(\frac{1}{4}\right);\quad B_n\left(\frac{1}{6}\right).$$

c) On se propose de démontrer que, pour tout entier m strictement positif B_{2m} a exactement un zéro sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, que l'on appellera θ_m.

1) Vérifier qu'il existe dans $\mathbb{N}^*$ au moins un nombre m tel que la fonction $x \mapsto (-1)^m B_{2m-1}(x)$ soit strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

2) Soit m un tel nombre. Etudier les variations de $(-1)^m B_{2m}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et déterminer le nombre des zéros B_{2m} sur cet intervalle.

3) De cette étude, déduire que $(-1)^{m+1} B_{2m+1}(x)$ est strictement positif sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

4) Justifier alors la proposition énoncée au début de la question.

5) Vérifier que, quelque soit m, θ_m appartient à $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right[$.

d) 1) Calculer pour tout m la borne supérieure de $|B_{2m}(x)|$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2) En déduire que : $\sup\limits_{[0,1]} |B_{2m}(x)| = |b_{2m}|$.

- III -

Pour tout polynôme P, on désignera par $\tilde{P}$ la fonction périodique de période 1 telle que :

$$\forall x \in]0, 1[,\ \tilde{P}(x) = P(x) \text{ et } \tilde{P}(0) = \frac{1}{2}(P(0) + P(1)).$$

a) Montrer que $\tilde{P}(x)$ est développable en série de Fourier sous la forme :

$$\tilde{P}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos 2k\pi x + \beta_k \sin 2k\pi x).$$

α_0, α_k, β_k étant les coefficients de Fourier, dont on donnera les expressions respectives sous forme d'intégrales.

b) Utilisant les résultats obtenus dans la partie I :

1) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\tilde{B}_{2n}$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, que $\tilde{B}_{2n-1}$ est impaire et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ si n est supérieur ou égal à 2.

c) Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\int_0^1 B_{2n}(x)\cos 2k\pi x \, dx = I_k(n).$$

1) Donner la valeur de $I_0(n)$.

2) Trouver une relation de récurrence entre $I_k(n+1)$ et $I_k(n)$.

3) Calculer $I_k(1)$.

4) Montrer alors que l'on a, pour tout x de $[0,1]$:

$$B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n}}\cos 2k\pi x.$$

5) En déduire l'expression en fonction de n et b_{2n} de la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}$.

d) 1) Trouver, grâce à un encadrement judicieux, la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-2n}.$$

2) En déduire que pour n infiniment grand on a :

$$b_{2n} \sim 2\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}}.$$

3) Calculer, pour tout $x \in [0,1]$, la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)}.$$

e) 1) Calculer le développement en série de Fourier de $\tilde{B}_1$.

2) Démontrer sans nouveau calcul d'intégrale que, pour tout n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad B_{2n-1}(x) = 2(-1)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n-1}}\sin 2k\pi x.$$

- IV -

Dans cette partie, f désigne une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^{2n}, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) Pour tout k appartenant à l'intervalle $[\![1,n]\!]$ de $\mathbb{N}$ on pose :

$$\int_0^1 (B_{2k}(t) - B_{2k}(0))f^{(2k)}(t)\, dt = J_k.$$

1) Exprimer l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t)\, dt$$

en fonction de J_1, $f(1)$ et $f(0)$.

2) Montrer que pour tout k supérieur ou égal à 2 on a :

$$J_k - J_{k-1} = b_{2k-2}\left(f^{(2k-3)}(1) - f^{(2k-3)}(0)\right).$$

3) Justifier alors l'égalité suivante :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right) + \int_0^1 (B_{2n}(t) - B_{2n}(0)) f^{(2n)}(t)\,dt.$$

b) Application au cas où $f(t) = e^{\alpha t}$, où α est un nombre complexe tel que $|\alpha| < 2\pi$.

1) Appliquant à cette fonction l'égalité établie dans la question précédente, vérifier que :

$$\frac{\alpha}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_{2j}\alpha^{2j} + \rho_n(\alpha)$$

où

$$\rho_n(a) = \frac{-\alpha^{2n+1}}{e^{\alpha}-1}\int_0^1 e^{\alpha t}(B_{2n}(t) - b_{2n})\,dt.$$

2) Utilisant l'équivalence établie dans III.D.2), montrer que si $|\alpha| < 2\pi$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n(\alpha) = 0.$$

En déduire que pour tout α de module strictement inférieur à 2π on a :

$$\frac{\alpha}{2}\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} b_{2j}\alpha^{2j}.$$

c) Utilisant ce résultat, trouver le développement en série entière en x sur $]-\pi,\pi[$ de la fonction :

$$x \mapsto x\,\mathrm{cotan}(x),$$

prolongée par continuité en 0.

- Fin du problème -