

# Etude de la fonction $\zeta$ de RIEMANN

## 1) Définition

Pour  $x$  réel donné, la série de terme général  $\frac{1}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , converge si et seulement si  $x > 1$ .

La fonction zeta de RIEMANN est la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$(\forall x > 1), \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

**Remarque.** Pour  $z$  complexe et  $n$  naturel non nul donné,  $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z) \ln n}} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}$ . Par suite, la série de terme général  $\frac{1}{n^z}$  converge absolument si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .

2) La fonction  $f : x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

Pour  $x$  réel et  $n$  entier naturel non nul donné, posons  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

- Si  $x \leq 0$ , la suite  $(u_n(x))_{n \geq 1}$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et la série de terme général  $u_n(x)$  diverge grossièrement.
- Si  $x > 0$ , la suite  $((-1)^{n-1} u_n(x))_{n \geq 1}$  est de signe constant et tend vers 0 en décroissant. La série de terme général  $u_n(x)$  converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

La série de terme général  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , converge si et seulement si  $x > 0$ .

## 3) Une relation entre $\zeta$ et $f$ .

Soit  $x$  un réel strictement supérieur à 1.  $\zeta(x)$  et  $f(x)$  existent et

$$\zeta(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{2p-1}}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x} \zeta(x).$$

Donc,  $f(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$  ou encore

$$(\forall x > 1), \zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}} f(x).$$

## 4) Continuité de $\zeta$ sur $]1, +\infty[$ .

Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1 donné.

Pour  $n \geq 1$  donné, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est continue sur  $[a, +\infty[$ . De plus, pour tout réel  $x$  de  $[a, +\infty[$ ,  $\left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$  avec égalité pour  $x = a$  ou encore

$$\sup \left\{ \left| \frac{1}{n^x} \right|, x \in [a, +\infty[ \right\} = \frac{1}{n^a}.$$

Puisque la série numérique de terme général  $\frac{1}{n^a}$  converge (série de RIEMANN d'exposant  $a > 1$ ), la série de fonctions de terme général  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , est normalement convergente et donc uniformément convergente sur  $[a, +\infty[$ . La somme  $\zeta$  est donc continue sur  $[a, +\infty[$  en tant que limite uniforme sur  $[a, +\infty[$  d'une suite de fonctions continues sur  $[a, +\infty[$ . Ceci étant vrai pour tout réel  $a$  de  $]1, +\infty[$ , on a montré que

la fonction  $\zeta$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

### 5) Continuité de $f$ sur $]0, +\infty[$ .

L'égalité du 3) et la continuité de  $\zeta$  sur  $]1, +\infty[$  montre déjà que  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . Montrons que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $a$  un réel strictement positif donné. Pour  $x$  réel supérieur ou égal à  $a$  et  $n$  entier naturel non nul donnés, posons

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{p^x} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}.$$

On rappelle que la série de terme général  $\frac{(-1)^p}{p^x}$  est alternée et d'après une majoration classique du reste d'ordre  $n$  d'une série alternée (à savoir que la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue de son premier terme) on a

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^x} \right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Donc, la fonction  $R_n$  est bornée sur  $[a, +\infty[$  et pour tout naturel non nul  $n$ ,

$$\sup\{|R_n(x)|, x \in [a, +\infty[ \} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Comme  $a > 0$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|R_n(x)|, x \in [a, +\infty[ \} = 0$ . On a ainsi montré que la série de fonctions de terme général  $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , est uniformément convergente sur  $[a, +\infty[$ . Comme chacune de ces fonctions est continue sur  $[a, +\infty[$ , la somme  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ . Ceci étant vrai pour tout réel  $a$  de  $]0, +\infty[$ , on a montré que

f est continue sur  $]0, +\infty[$ .

### 6) Sens de variation de la fonction $\zeta$ .

Chacune des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ . Donc, la fonction  $\zeta$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$  en tant que somme de fonctions décroissantes sur  $]1, +\infty[$ .

La fonction  $\zeta$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

### 7) Convexité de la fonction $\zeta$ .

Chacune des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est convexe sur  $]1, +\infty[$  (en effet, pour  $n$  entier naturel non nul donné, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$  et de plus  $\left(\frac{1}{n^x}\right)'' = \frac{(-\ln n)^2}{n^x} \geq 0$ ). Donc  $\zeta$  est convexe sur  $]1, +\infty[$  en tant que somme de fonctions convexes sur  $]1, +\infty[$ .

$\zeta$  est convexe sur  $]1, +\infty[$ .

**Remarque.** On sait qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle et on retrouve la continuité de  $\zeta$  sans recours à une convergence uniforme.

### 8) Etude de la fonction $\zeta$ au voisinage de $+\infty$ .

**a) Limite de  $\zeta(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .** D'après 4), la série de fonctions de somme  $\zeta$  converge uniformément vers  $\zeta$  sur  $[2, +\infty[$ . De plus, chacune des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$  à savoir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Le théorème d'interversion des limites permet alors d'affirmer que la fonction  $\zeta$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1.$$

b) Un équivalent de  $\zeta(x) - 1$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $2^x(\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$ . Maintenant, pour  $x \in [2, +\infty[$  et  $n \geq 2$

$$0 < \left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$

Comme la série de terme général  $\frac{4}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ , converge, la série de fonctions de terme général  $x \mapsto \left(\frac{2}{n}\right)^x$  converge normalement et donc uniformément sur  $[2, +\infty[$ . Puisque chaque fonction  $x \mapsto \left(\frac{2}{n}\right)^x$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x(\zeta(x) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

On a montré que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$  ou encore que

$$\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x}).$$

## 9) Etude au voisinage de 1.

a) **Limite de  $\zeta$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures.** D'après 6), la fonction  $\zeta$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ . Par suite, quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures,  $\zeta$  admet une limite  $\ell$  élément de  $] -\infty, +\infty[$ . Déterminons alors  $\ell$ .

Soit  $N$  un entier naturel non nul donné. Pour tout réel  $x \in ]1, +\infty[$ , on a

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}.$$

Mais alors, quand  $x$  tend vers 1, on obtient  $\ell \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ , cette inégalité étant vraie pour tout naturel non nul  $N$ . On en déduit que

$$\ell \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \zeta(x) = +\infty.$$

## b) Equivalent de $\zeta$ quand $x$ tend vers 1.

**Première solution (comparaison avec une intégrale).** Soit  $x \in ]1, +\infty[$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est continue et décroissante sur  $]1, +\infty[$ . Donc

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \text{ et } \forall n \geq 2, \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[ \frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1},$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} + 1,$$

Ainsi,

$$\forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que  $(x-1)\zeta(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers 1 et donc que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

**Deuxième solution (utilisation de la fonction  $f$ ).** On a vu au 3) que pour  $x > 1$ ,  $\zeta(x) = \frac{f(x)}{1-2^{1-x}}$ . D'après 5),  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et donc en 1. Par suite,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

D'autre part, quand  $x$  tend vers 1,

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln 2} - (1-x)\ln 2 = (x-1)\ln 2,$$

et donc

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\sim} \frac{\ln 2}{\ln 2(x-1)}.$$

et on retrouve

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

**10) Dérivées successives.** Soit  $a$  un réel strictement plus grand que 1 donné.

Chaque fonction  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ , est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, +\infty[$  et pour  $x \geq a$ ,  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

De plus, pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Montrons que la série numérique de terme général  $\frac{(\ln n)^k}{n^a}$  converge. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{(1+a)/2} = \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

et donc, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{(\ln n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right)$  avec  $\frac{a+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$ . Ainsi, la série numérique de terme général  $\frac{(\ln n)^k}{n^a}$  converge.

On en déduit que, pour  $k \geq 1$ , la série de fonctions de terme général  $f_n^{(k)}$  converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ . En résumé,

- la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement vers  $\zeta$  sur  $[a, +\infty[$ ,
- chaque  $f_n$ ,  $n \geq 1$ , est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, +\infty[$
- pour tout naturel non nul  $k$ , la série de fonctions de terme général  $f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction  $\zeta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, +\infty[$  et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout  $a$  élément de  $]1, +\infty[$ , on a montré que

la fonction  $\zeta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et  $\forall x \in ]1, +\infty[, \forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}$ .

**Remarques.**

1) La fonction  $\zeta$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tout réel  $x$  de  $]1, +\infty[, \zeta'(x) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n n^{-x} < 0$  et on retrouve le fait que  $\zeta$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

2) La fonction  $\zeta$  est de classe  $C^2$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tout réel  $x$  de  $]1, +\infty[, \zeta''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln^2 n n^{-x} > 0$  et on retrouve le fait que  $\zeta$  est convexe sur  $]1, +\infty[$ .

**11) Graphe .**

