La série harmonique

Pour n naturel non nul , on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) H_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geqslant 1$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et admet ainsi une limite dans $]-\infty, +\infty]$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ, alors $H_{2n} - H_n$ tend vers $\ell - \ell = 0$, ce qui contredit le fait que, pour tout $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty,$$

ou encore, la série harmonique diverge.

2) Equivalent de H_n quand n tend vers $+\infty$

Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que

$$\text{pour } k \geqslant 1,\ \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \text{ et pour } k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n+1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt = 1 + \ln n.$$

Ces inégalités restent vraies pour $n = 1$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

On en déduit encore que pour $n \geqslant 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Le théorème des gendarmes montre que $\frac{H_n}{\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

3) Convergence de la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = H_n - \ln n$.

1ère étude. Soit $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt.$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$. Par suite, pour $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est donc décroissante.

De plus , d'après 2), pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant H_n - \ln n = u_n \leqslant (1+\ln n) - \ln n = 1,$$

et donc, pour $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1]$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et donc converge vers un certain réel positif noté γ. Enfin, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite, on a $\gamma \in [0,1]$.

la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel de $[0,1]$ noté γ. γ s'appelle la constante d'Euler.

2ème étude. Pour $n \geqslant 1$, on pose aussi $v_n = H_n - \ln(n+1)$. On a

- pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = -(\ln(n+1) - \ln n) = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \geqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Donc, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)n \in \mathbb{N}^*$ sont adjacentes. On en déduit que les suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune à savoir γ, la constante d'Euler.
En particulier, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroit vers γ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croit vers γ, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \leqslant \gamma \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

3ème étude. Quand n tend vers $+\infty$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Maintenant, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$. On retrouve ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Comme $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right)$. En résumé

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right).$$

4) Valeurs approchées de γ.

On a vu précédemment que pour $n \geqslant 1$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ avec $u_n - v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par suite,

$$0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \frac{10^{-3}}{2} \Leftarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{10^{-3}}{2} \Leftarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,0005} - 1} \Leftarrow n \geqslant 1999,5\ldots \Leftarrow n \geqslant 2000.$$

Ainsi, la valeur exacte de v_{2000} est une valeur approchée de γ à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ près. Mais alors une valeur approchée α de v_{2000} à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ près de v_{2000} est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près car

$$|\gamma - \alpha| \leqslant |\gamma - v_{2000}| + |v_{2000} - \alpha| \leqslant \frac{10^{-3}}{2} + \frac{10^{-3}}{2} = 10^{-3}.$$

On calcule donc à la machine v_{2000} arrondi à la troisième décimale la plus proche et on obtient

$$\gamma = 0,577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

5) Equivalent de $H_n - \ln n - \gamma$.

Pour $n \geqslant 2$, d'après le calcul fait à la fin de 3),

$$H_n - \ln n - \gamma = \left(1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)\right) - \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Quand k tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} &= -\ln\frac{k-1}{k} - \frac{1}{k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, on a alors

$$H_n - \ln n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc, $H_n - \ln n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ ou encore

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour $n \geqslant 2$, H_n n'est pas entier.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, il existe des entiers naturels non nuls p_n et q_n tels que $H_n = \dfrac{2p_n+1}{2q_n}$ (H_n est alors le rapport d'un entier impair sur un entier pair et en particulier n'est pas entier).

• Pour $n = 2$, $H_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et on peut prendre $p_1 = q_1 = 1$.
• Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![2, n]\!]$, il existe des entiers naturels non nuls p_k et q_k tels que $H_k = \dfrac{2p_k+1}{2q_k}$.

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2m$ où $m \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= H_n + \frac{1}{n+1} = H_{2m} + \frac{1}{2m+1} \\ &= \frac{2p_{2m}+1}{2q_{2m}} + \frac{1}{2m+1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(2p_{2m}+1)(2m+1) + 2q_{2m}}{2q_{2m}(2m+1)} = \frac{2\times(p_{2m} + m + 2mp_{2m} + q_{2m}) + 1}{2\times(q_{2m}(2m+1))} = \frac{2p_{2m+1}+1}{2q_{2m+1}},\end{aligned}$$

où $p_{2m+1} = p_{2m} + m + 2mp_{2m} + q_{2m}$ et $q_{2m+1} = q_{2m}(2m+1)$ sont des entiers.

2ème cas. Si n est impair, on peut poser $n = 2m-1$ où $m \geqslant 2$. On a alors

$$H_{n+1} = H_{2m} = \sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}H_m + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}.$$

On a déjà $2 \leqslant m \leqslant m + m - 1 = 2m - 1 = n$ et par hypothèse de récurrence, il existe des entiers p_m et q_m tels que $H_m = \dfrac{2p_m+1}{2q_m}$. D'autre part, après réduction au même dénominateur, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}$ s'écrit sous la forme $\dfrac{K}{2L+1}$ où K et L sont des entiers naturels non nuls. Par suite,

$$H_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{2p_m+1}{2q_m} + \frac{K}{2L+1} = \frac{(2p_m+1)(2L+1) + 2\times 2Kq_m}{2\times 2q_m(2L+1)} = \frac{2(p_m + L + 2Lp_m + 2Kq_m) + 1}{2\times(2q_m(2L+1))} = \frac{2p_{2m}+1}{2q_{2m}},$$

où $p_{2m} = p_m + L + 2Lp_m + 2Kq_m$ et $q_{2m} = 2q_m(2L+1)$ sont des entiers naturels non nuls.

Dans tout les cas, on a trouvé des entiers naturels non nuls p_{n+1} et q_{n+1} tels que $H_{n+1} = \dfrac{2p_{n+1}+1}{2q_{n+1}}$. On a donc montré par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe des entiers naturels non nuls p_n et q_n tels que $H_n = \dfrac{2p_n+1}{2q_n}$ et en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ H_n \text{ n'est pas entier.}$$