
MATHEMATIQUES 2

I. Etude d'un exemple

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $\chi_A(A) = 0$. Ainsi

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

2. Puisque A n'est pas une matrice scalaire, la famille (I_2, A) est libre et $\mathbb{A} = \text{Vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.

Soit alors $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. D'après 1.,

$$\begin{aligned} (aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) &= aa'I_2 + (ab' + a'b)A + bb'A^2 = aa'I_2 + (ab' + a'b)A + bb'(\text{tr}(A)A - \det(A)I_2) \\ &= (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\text{tr}(A))A \in \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathbb{A} est stable pour \times et, puisque d'autre part \mathbb{A} contient $I_2 = 1 \cdot I_2 + 0 \cdot A$,

$$\mathbb{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ de dimension 2.}$$

3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = aI_2 + bA$. D'après 2.,

$$M^2 = (a^2 - b^2\det(A))I_2 + (2ab + b^2\text{tr}(A))A.$$

Par suite, puisque la famille (I_2, A) est libre,

$$\begin{aligned} M^2 = -I_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2\det(A) = -1 \\ b(2a + b\text{tr}(A)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\text{tr}(A) \\ b^2 \left(\frac{(\text{tr}(A))^2}{4} - \det(A) \right) = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\text{Tr}(A) \\ b^2 \frac{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}{4} = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ce dernier système a des solutions dans \mathbb{R}^2 si et seulement si $(\text{tr}A)^2 < 4 \det A$ et donc

$$\exists M \in \mathbb{A} / M^2 = -I_2 \Leftrightarrow (\text{tr}A)^2 < 4 \det A.$$

4. Pour $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \neq -1$ et donc, $(\lambda I_2)^2 \neq -I_2$. Donc, B n'est pas une matrice scalaire et la famille (I_2, B) est une famille libre de \mathbb{A} . De plus, $\text{card}(I_2, B) = 2 = \dim \mathbb{A}$ et la famille (I_2, B) est une base de \mathbb{A} .

Toute matrice de \mathbb{A} s'écrit donc de manière unique sous la forme $xI_2 + yB$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit alors $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$. Puisque (I_2, B) est une base de \mathbb{A} , φ est bijective et est clairement linéaire.

$$x + yi \mapsto xI_2 + yB$$

Ensuite, puisque $B^2 = -I_2$, pour $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \varphi((x + iy)(x' + iy')) &= \varphi((xx' - yy') + (xy' + yx')i) = (xx' - yy')I_2 + (xy' + yx')B = (xI_2 + yB)(x'I_2 + y'B) \\ &= \varphi(x + iy)\varphi(x' + iy'). \end{aligned}$$

φ est donc un morphisme pour \times , et finalement, en tenant compte de $\varphi(1) = I_2$, φ est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps

$(\mathbb{A}, +, \times)$ est un corps.

5. Si $(\text{tr}A)^2 = 4\det A$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(aI_2 + bA)^2 = (a^2 - \frac{b^2}{4}\text{tr}(A))I_2 + (2ab + b^2\text{tr}(A))A.$$

Par suite,

$$(aI_2 + bA)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{1}{4}b^2\text{tr}(A) = 0 \\ 2ab + b^2\text{tr}(A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ ou } a = -\frac{b}{2}\text{tr}(A) \Leftrightarrow a = -\frac{b}{2}\text{tr}(A).$$

Les matrices $M = aI_2 + bA$ telles que $M^2 = 0$ sont les $b(-\frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 + A)$, $b \in \mathbb{R}$.

En particulier, l'équation $M^2 = 0$ admet au moins une solution non nulle dans \mathbb{A} (par exemple la matrice $-\frac{1}{2}\text{tr}(A)I_2 + A$ qui est non nulle puisque A n'est pas une matrice scalaire). Ainsi, \mathbb{A} n'est pas intègre et donc pas un corps.

Si $(\text{tr}A)^2 = 4\det A$, $(\mathbb{A}, +, \times)$ n'est pas un corps.

6. Il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Mais alors, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$P^{-1}(aI_2 + bA)P = aI_2 + bP^{-1}AP = aI_2 + bB \text{ et de même } P(aI_2 + bB)P^{-1} = aI_2 + bA.$$

Posons alors $\psi : \begin{matrix} \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{B} \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{matrix}$. Ce qui précède montre que ψ est une bijection de \mathbb{A} sur \mathbb{B} , de réciproque $M \mapsto P^{-1}MP$.

ψ est clairement linéaire. Enfin, pour $(M, N) \in \mathbb{A}^2$, on a

$$\psi(MN) = P^{-1}MNP = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = \psi(M)\psi(N),$$

Comme de plus $\psi(I_2) = I_2$, ψ est un isomorphisme de l'algèbre \mathbb{A} sur l'algèbre \mathbb{B} .

7. On a $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$. Son discriminant vaut $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) > 0$. χ_A admet donc deux racines réelles distinctes et A est ainsi diagonalisable (dans \mathbb{R}). Il existe une matrice diagonale D , non scalaire puisque les valeurs propres de A sont distinctes, telle que A est semblable à D . D'après 6., l'algèbre \mathbb{A} est isomorphe à l'algèbre engendrée par I_2 et D .

Maintenant, $\text{Vect}(I_2, D) \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\text{Vect}(I_2, D)) = 2 = \dim(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$. Donc, $\text{Vect}(I_2, D) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, l'algèbre \mathbb{A} est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

$\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas intègre car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un corps et il en est de même de \mathbb{A} .

II. Quelques résultats généraux

1. Puisque \mathbb{D} est stable pour la multiplication, Φ_a est bien une application de \mathbb{D} dans lui-même. Soient alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{D}^2$.

$$\Phi_a(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda.a x + \mu.a y = \lambda\Phi_a(x) + \mu\Phi_a(y).$$

Φ_a est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{D} .

$\Phi_a \in \mathcal{L}(\mathbb{D})$.

2. Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \in \mathbb{D}^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$. Pour x dans E ,

$$(\lambda\Phi_{\mathbf{a}} + \lambda'\Phi_{\mathbf{a}'})x = \lambda\mathbf{a}x + \lambda'\mathbf{a}'x = (\lambda\mathbf{a} + \lambda'\mathbf{a}')x = \Phi_{\lambda\mathbf{a} + \lambda'\mathbf{a}'}(x),$$

puis

$$\Phi_{\mathbf{a}} \circ \Phi_{\mathbf{a}'}(x) = \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}'x) = \mathbf{a}\mathbf{a}'x = \Phi_{\mathbf{a}\mathbf{a}'}(x),$$

et enfin

$$\Phi_{1_{\mathbb{A}}}(x) = 1_{\mathbb{A}}x = x = \text{Id}_{\mathbb{D}}(x).$$

Pour $(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \in \mathbb{D}^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$, on a donc

$$\Phi_{\lambda\mathbf{a} + \lambda'\mathbf{a}'} = \lambda\Phi_{\mathbf{a}} + \lambda'\Phi_{\mathbf{a}'}, \quad \Phi_{\mathbf{a}} \circ \Phi_{\mathbf{a}'} = \Phi_{\mathbf{a}\mathbf{a}'} \text{ et } \Phi_{1_{\mathbb{A}}} = \text{Id}_{\mathbb{D}}.$$

L'application $\mathbf{a} \mapsto \Phi_{\mathbf{a}}$ est donc un morphisme d'algèbres, de l'algèbre \mathbb{D} vers l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{D})$. Comme il est d'autre part connu que l'application $\Phi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}\Phi$ est un morphisme d'algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ vers l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Ψ est un morphisme d'algèbres en tant que composée de morphismes d'algèbres.

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$.

$$\mathbf{a} \in \text{Ker}\Psi \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}_n \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{D}, \mathbf{a}x = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times 1_{\mathbb{D}}\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Ψ est donc injectif.

Par suite, $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image d'une algèbre par un morphisme d'algèbres. Ψ étant injectif, réalise un isomorphisme d'algèbres de \mathbb{D} sur l'algèbre $\Psi(\mathbb{D})$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ où $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2$. Puisque

$$\Phi_z(1) = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \text{ et que } \Phi_z(i) = -\mathbf{b} + i\mathbf{a},$$

on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_z) = \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix}.$$

4. (a) La matrice $B = A - \lambda I_n$ est un élément de \mathbb{A} , non nul (car A n'est pas scalaire) et n'est pas inversible (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) car λ est valeur propre de A . Cette matrice n'est pas plus inversible dans \mathbb{A} car l'élément neutre I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans \mathbb{A} . \mathbb{A} contient donc une matrice non nulle et non inversible dans \mathbb{A} , et \mathbb{A} n'est pas un corps.

(b) Une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire est en particulier une matrice non scalaire admettant au moins une valeur propre réelle. D'après (a), si \mathbb{A} contient une telle matrice, \mathbb{A} n'est pas un corps.

(c) Soit A un élément non nul de \mathbb{A} . On sait déjà que Φ_A est un endomorphisme de \mathbb{A} . Puisque \mathbb{A} est intègre, on en déduit que le noyau de Φ_A est nul et donc que Φ_A est injectif. Puisque \mathbb{A} est de dimension finie, Φ_A est un automorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{A} . En particulier, l'élément I_n de \mathbb{A} admet un antécédent par Φ_A . Donc, il existe $A' \in \mathbb{A}$ telle que $AA' = I_n$. La matrice A est donc inversible à droite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, son inverse A' est dans \mathbb{A} et A est inversible dans \mathbb{A} .

On a montré que tout élément non nul de \mathbb{A} admet un inverse dans \mathbb{A} et donc \mathbb{A} est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

1. $A^2 = -I_n \Rightarrow (\det(A))^2 = (-1)^n \Rightarrow (-1)^n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow n$ pair.

2. $\mathbb{H} = \text{Vect}(I_n, A, B, AB)$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n . De plus,

$$\begin{aligned} A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad A \times AB = -B, \quad AB \times B = -A, \quad B \times AB = -BBA = A, \quad AB \times A = A(-AB) = B, \\ AB \times AB = -A^2B^2 = -I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, tout produit de deux éléments d'une famille génératrice de \mathbb{H} est encore dans \mathbb{H} , et, par linéarité, \mathbb{H} est stable pour \times . Donc

$$\mathbb{H} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. D'après les règles de calcul trouvées en 2., on a

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n.$$

4. (a) Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} tI_n + xA + yB + zAB = 0 &\Rightarrow (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)I_n = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \Rightarrow t = x = y = z = 0. \end{aligned}$$

La famille (I_n, A, B, AB) est donc une famille libre de \mathbb{H} . Etant génératrice de \mathbb{H} , cette famille est une base de \mathbb{H} .

\mathbb{H} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4.

(b) D'après ce qui précède,

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, tI_n + xA + yB + zAB = 0 \Leftrightarrow t = x = y = z = 0.$$

Soit alors $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$. $t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul et

$$(tI_n + xA + yB + zAB) \frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} (tI_n - xA - yB - zAB) = I_n.$$

Ainsi, tout élément non nul de \mathbb{H} est inversible dans \mathbb{H} et donc,

\mathbb{H} est un corps.

5. (a) On a $J^2 = -I_2$ et un calcul par blocs fournit immédiatement

$$A^2 = -I_4, B^2 = -I_4 \text{ et } AB = -BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons tout d'abord que ${}^tJ = -J$. Par suite, pour $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, on a immédiatement

$${}^t(tI_n + xA + yB + zC) = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}.$$

De plus, pour $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$,

$${}^tM = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)M^{-1}.$$

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ et $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$. Puisque (I_n, A, B, C) est libre, on a d'après III.5.,

$${}^tM = -M \Leftrightarrow tI_n - xA - yB - zC = -(tI_n + xA + yB + zC) \Leftrightarrow t = 0.$$

Ainsi, $\mathbb{L} = \text{Vect}(A, B, C)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$.

$A^2 = -I_4$ n'est pas un quaternion pur et \mathbb{L} n'est pas stable pour \times et donc pas une algèbre.

2. Soient $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$ puis $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$. Puisque la base (A, B, C) est orthonormée, on a

$$(M|N) = xx' + yy' + zz'$$

puis

$$MN = (xA + yB + zC)(x'A + y'B + z'C) = -(xx' + yy' + zz')I_4 + (yz' - y'z)A + (zx' - xz')B + (xy' - yx')C,$$

et en échangeant les rôles de M et N ,

$$NM = -(xx' + yy' + zz')I_4 - (yz' - y'z)A - (zx' - xz')B - (xy' - yx')C.$$

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(xx' + yy' + zz')I_4 = -(M|N)I_4.$$

$$\forall (M, N) \in \mathbb{L}^2, \frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4.$$

3. Soit M un quaternion pur. D'après 2.,

$$M^2 = -\|M\|^2 I_4.$$

M^2 est donc de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.

Réciproquement, supposons que $M = tI_4 + xA + yB + zC$ est un quaternion tel que M^2 est de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.

- si $M = 0$, M est un quaternion pur.
- Sinon, d'après III.3.

$$\lambda^4 = \det(M^2) = (\det M)^2 = (\det M)(\det {}^t M) = \det((x^2 + y^2 + z^2 + t^2)I_4) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^4,$$

et puisque $\lambda \leq 0$,

$$\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) < 0.$$

Maintenant, l'égalité $M^2 = \lambda I_4$ s'écrit encore $M^{-1} = \frac{1}{\lambda}M$ et d'après III.5.b),

$${}^t M = -\lambda M^{-1} = -\lambda \frac{1}{\lambda} M = -M,$$

et M est un quaternion pur.

$$\forall M \in \mathbb{H}, (M \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^- / M^2 = \lambda I_4).$$

4. Soit M un quaternion pur. Il existe un réel négatif λ tel que $M^2 = -\lambda I_4$. Puisque Φ est un morphisme d'algèbres,

$$(\Phi(M))^2 = \Phi(M^2) = \Phi(\lambda I_4) = \lambda \Phi(I_4) = \lambda I_4.$$

$\Phi(M)$ est donc un quaternion pur. Ensuite, d'après 2., $-\|M\|I_4 = M^2$ et

$$-\|\Phi(M)\|^2 I_4 = (\Phi(M))^2 = \Phi(M^2) = \Phi(-\|M\|^2 I_4) = -\|M\|^2 I_4.$$

Donc, $\|\Phi(M)\| = \|M\|$.

Ainsi, la restriction de Φ à \mathbb{L} transforme un élément de \mathbb{L} en un élément de \mathbb{L} et est donc un endomorphisme de \mathbb{L} . D'autre part, cette restriction conserve la norme et est donc un automorphisme orthogonal de \mathbb{L} .

5. (a) Soient M et N deux quaternions purs colinéaires et de mêmes normes.

Puisque M et N sont colinéaires et de même norme, $N = \pm M$.

- Si $N = M$, $P = I_4$ convient.
- Si $N = -M$, soit P un quaternion pur non nul orthogonal à M . Alors, d'après IV.2., $MP = -PM$ puis

$$P^{-1}NP = -P^{-1}MP = P^{-1}PM = M.$$

Finalement, si M et N sont deux quaternions purs colinéaires et de même norme, $\exists P \in \mathbb{H} \setminus \{0\} / N = P^{-1}MP$.

(b) Soient M et N deux quaternions purs de même norme. D'après IV.2., $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ et $N^2 = -\|N\|^2 I_4 = -\|M\|^2 I_4$. Donc,

$$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = -\|M\|^2 N + \|M\|^2 M = \|M\|^2 (M - N).$$

Par suite,

$$M(MN - \|M\|^2 I_4) = (MN - \|M\|^2 I_4)N.$$

Soit $P = MN - \|M\|^2 I_4$. P est bien un élément de \mathbb{H} , car \mathbb{H} est une algèbre et vérifie $MP = PN$. De plus $P \neq 0$. En effet,

$$\begin{aligned} P = 0 &\Rightarrow MN - \|M\|^2 I_4 = 0 \Rightarrow MN + M^2 = 0 \text{ (puisque } M \text{ est un quaternion pur)} \\ &\Rightarrow M(M + N) = 0 \\ &\Rightarrow M + N = 0 \text{ (puisque } M \neq 0 \text{ et que } \mathbb{H} \text{ est un corps.)} \\ &\Rightarrow M \text{ colinéaire à } N \end{aligned}$$

ce qui n'est pas.

6. (Remarque. La question posée sous cette forme est fautive. Par exemple, considérons le cas où M et N ne sont pas colinéaires et posons $P = M + N$. P est un élément non nul de \mathbb{H} car M et N ne sont pas colinéaires. De plus,

$$MP = M^2 + MN = -\|M\|^2 I_4 + MN = -\|N\|^2 I_4 + MN = N^2 + MN = (M + N)N = PN.$$

Pour cette matrice P , on a $\alpha = 0$ et $Q = P = M + N$. Mais $M|Q = M|M + M|N = \|M\| \times \|N\| + M|N \neq 0$ puisque (M, N) est libre (cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

- Si $M = N$, on a choisit $P = I$ et donc $Q = 0$. Dans ce cas, Q est orthogonal à M et N .
- Si $M = -N$, on a pris pour P un quaternion pur orthogonal à M (et N). Dans ce cas, $\alpha = 0$ et $Q = P$. Q est encore orthogonal à M et N .
- Si (M, N) est libre, on a pris $P = MN - \|M\|^2 I_4$ et on veut écrire P sous la forme $\alpha I_4 + Q$ où Q est un quaternion pur. Mais par définition donnée en 1., un quaternion pur est une matrice antisymétrique. Comme αI_4 et $-\|M\|^2 I_4$ sont symétriques, on en déduit que Q est la partie antisymétrique de MN à savoir

$$Q = \frac{1}{2}(MN - {}^t(MN)) = \frac{1}{2}(MN - NM).$$

Mais alors

$$-(Q|M)I_4 = \frac{1}{4}(M(MN - NM) + (MN - NM)M) = \frac{1}{4}(M^2N - NM^2) = \frac{-\|M\|^2}{4}(N - N) = 0.$$

Q est bien orthogonale à M puis à N par symétrie des rôles de M et N .

7. Tout d'abord, si P est un élément non nul de \mathbb{H} , l'application $\Phi_P : M \mapsto P^{-1}MP$ est une application de \mathbb{H} dans lui-même, linéaire, bijective de réciproque $M \mapsto PMP^{-1}$, vérifiant de plus $\Phi_P(I)$ et pour $(M, M') \in \mathbb{H}^2$,

$$\Phi_P(M)\Phi_P(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = \Phi_P(MM').$$

Φ_P est donc un automorphisme de l'algèbre \mathbb{H} .

Réciproquement, soit Φ un automorphisme de l'algèbre \mathbb{H} . Φ est entièrement déterminé par les images de A et B car, pour $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$,

$$\Phi(tI_4 + xA + yB + zAB) = tI_4 + x\Phi(A) + y\Phi(B) + z\Phi(A)\Phi(B).$$

D'après 4., Φ transforme le quaternion pur A en un quaternion pur de même norme. D'après 5., il existe un quaternion non nul P' tel que $\Phi(A) = P'^{-1}AP'$. L'application $\Phi' = (\Phi_{P'})^{-1} \circ \Phi = \Phi_{P'^{-1}} \circ \Phi$ est alors un automorphisme de l'algèbre \mathbb{H} vérifiant de plus $\Phi'(A) = A$. Cherchons alors un quaternion non nul P'' tel que $P''^{-1}AP'' = A$ (c'est à dire commutant avec A) et $\Phi'(B) = P''^{-1}BP''$.

A et B sont des quaternions purs de norme 1 et orthogonaux. $\Phi'(B)$ est d'après 4. un quaternion pur de norme 1, orthogonal à A . Donc, il existe un réel θ tel que $\Phi'(B) = \cos \theta B + \sin \theta C$. La question 6. nous invite à chercher P'' sous la forme $P'' = \alpha I_4 + \beta A$. Une telle matrice commute avec A car est un polynôme en A . La condition $\Phi'(B) = P''^{-1}BP''$ s'écrit

$$B(\alpha I_4 + \beta A) = (\alpha I_4 + \beta A)(\cos \theta B + \sin \theta C),$$

ou encore

$$\alpha B - \beta C = (\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta)B + (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)C.$$

Puisque (B, C) est une famille libre, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha(1 - \cos \theta) + \beta \sin \theta = 0 \\ \alpha \sin \theta + \beta(1 + \cos \theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} \right) = 0 \\ 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

car $\cos \frac{\theta}{2}$ et $\sin \frac{\theta}{2}$ ne peuvent être simultanément nul. Mais alors $\alpha = \cos \frac{\theta}{2}$, $\beta = -\sin \frac{\theta}{2}$ et donc $P'' = \cos \frac{\theta}{2} I_4 - \sin \frac{\theta}{2} A$ conviennent.

Pour ce choix de $P'' \neq 0$, on a $\Phi'(A) = P''^{-1}AP''$ et $\Phi'(B) = P''^{-1}BP''$. Mais alors Φ' coïncide avec $\Phi_{P''}$ en A et B et donc, d'après une remarque faite plus haut, $\Phi' = \Phi_{P''}$. Ainsi, $\Phi = \Phi_{P'} \circ \Phi_{P''} = \Phi_{P'P''}$. En posant $P = P'P''$, on a trouvé un quaternion pur non nul P tel que pour tout quaternion M, $\Phi(M) = P^{-1}MP$. Nous avons ainsi démontré que

tout automorphisme de l'algèbre \mathbb{H} est un automorphisme intérieur.