
MATHEMATIQUES 2

I. Exercice préliminaire

1.

$$H = {}^t\Gamma \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

H est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, H est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle).

On a immédiatement $\text{rg}(H - I_3) = 1$. Donc, $\dim(\text{Ker}(H - I_3)) = 2$, et puisque H est diagonalisable, 1 est valeur propre d'ordre 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace de H : $1 + 1 + \lambda = 18$ et donc $\lambda = 16$. Donc,

$$\text{Sp}(H) = (1, 1, 16).$$

Il est immédiat que $\text{Ker}(H - I_3)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Puisque les sous-espaces propres de H sont orthogonaux, on a d'autre part $\text{Ker}(H - 16I_3) = (\text{Ker}(H - I_3))^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$. On prend $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ (de sorte que (e_3) est une base orthonormée de $\text{Ker}(H - 16I_3)$), puis $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ (vecteur unitaire de $\text{Ker}(H - I_3)$) et enfin,

$$e_2 = e_3 \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel), constituée de vecteurs propres de H.

Si $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(1, 1, 4) \in \mathcal{D}_3^+(\mathbb{R})$ alors $D^2 = P^{-1}HP$.

2. Puisque S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, S est symétrique. De plus, pour X vecteur colonne quelconque, on a

$${}^tXSX = {}^tX(PD{}^tP)X = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = x'^2 + y'^2 + 4z'^2 \geq 0,$$

où x' , y' et z' sont les composantes de tPX . La matrice S est donc positive.

Comme les valeurs propres de S sont les valeurs propres de D à savoir 1 et 4, 0 n'est pas valeur propre de S. Par suite, S est inversible. On peut donc poser $U = \Gamma S^{-1}$. On a déjà $\Gamma = US$ puis, S étant symétrique et P étant orthogonale,

$${}^tUU = S^{-1} {}^t\Gamma \Gamma S^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PD^{-1}P^{-1} = I_3.$$

Donc, U est une matrice orthogonale. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = \Gamma \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} {}^t \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{1} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II. Calcul de la distance de \mathbf{A} à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Posons $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\mathbf{B} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient ligne j , colonne j de la matrice ${}^t \mathbf{A} \mathbf{B}$ vaut $\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$ et donc,

$$\text{Tr}({}^t \mathbf{A} \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Ainsi, l'application $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \text{Tr}({}^t \mathbf{A} \mathbf{B})$ n'est autre que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est en particulier un produit scalaire.

4. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t \mathbf{A} = \mathbf{A} = -\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{0}\}$. Ensuite, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + {}^t \mathbf{A}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - {}^t \mathbf{A}),$$

avec $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + {}^t \mathbf{A}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(\mathbf{A} - {}^t \mathbf{A}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Soit enfin $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} | \mathbf{B} = \text{Tr}({}^t \mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}) = \text{Tr}(-{}^t \mathbf{B} \mathbf{A}) = -\mathbf{B} | \mathbf{A},$$

et donc, $\mathbf{A} | \mathbf{B} = 0$. Cette somme directe est donc orthogonale.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $B = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ et $C = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. B (resp. C) est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). Par suite, pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $B - M$ est orthogonale à C et le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire

$$\|A - M\|^2 = \|C + (B - M)\|^2 = \|C\|^2 + \|B - M\|^2 \geq \|C\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $M = B$. Donc,

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\| = \min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\| = \|C\| = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^t A) \right\|.$$

De même,

$$d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A + {}^t A) \right\|.$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^t A) \right\| \text{ et } d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A + {}^t A) \right\|.$$

6. La partie symétrique de Γ est

$$\frac{1}{2}(\Gamma + {}^t \Gamma) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(\Gamma + {}^t \Gamma) \right\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de S dans \mathbb{C} sont donc réelles.

- Supposons $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors,

$$0 \leq {}^t X S X = {}^t X (\lambda X) = \lambda \|X\|^2.$$

Maintenant X n'est pas nul et donc $\|X\|^2 > 0$. Après simplification, on obtient $\lambda \geq 0$. On a ainsi montré que toutes les valeurs propres de S sont des réels positifs ou nuls.

- Supposons que toutes les valeurs propres de S soient des réels positifs ou nuls. Notons $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des n valeurs propres de S et posons $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. On sait que

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / S = P D P^{-1}.$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $X' = {}^t P X = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a alors

$${}^t X S X = {}^t X P D {}^t P X = {}^t ({}^t P X) D ({}^t P X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 \geq 0.$$

On a ainsi montré que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

En résumé

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), (S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+).$$

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ${}^t ({}^t A) = {}^t A {}^t ({}^t A) = {}^t A A$ et donc ${}^t A A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^t X ({}^t A A) X = {}^t ({}^t A X) (A X) = \|A X\|^2 \geq 0.$$

Donc,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

9. a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. tA_iA_j est le coefficient ligne i , colonne j de tAA et donc de D^2 . Par suite,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, {}^tA_iA_j = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}d_i^2.$$

En particulier, pour chaque i on a $\|A_i\|^2 = {}^tA_iA_i = d_i^2$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (d_i = 0 \Leftrightarrow A_i = 0).$$

b. Si A est nulle, alors D est nulle et n'importe quelle base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ convient. Sinon, pour chaque colonne A_i non nulle, (d_i est alors non nul) et on pose

$$E_i = \frac{1}{\|A_i\|}A_i = \frac{1}{d_i}A_i.$$

Ces vecteurs E_i constituent clairement une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On la complète en une base orthonormée (E_1, \dots, E_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour chaque i , que la colonne A_i soit nulle ou pas, on a $A_i = d_iE_i$.

c. Soit E la matrice dont les colonnes sont E_1, \dots, E_n . Puisque ces colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel, on sait que E est une matrice orthogonale. Les égalités de la question b. signifient alors que $A = ED$.

10. a. Posons $S = {}^tAA = {}^tBB$. D'après la question 8., S est une matrice symétrique positive et d'après la question 7., les valeurs propres de S sont des réels positifs.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de S . Pour chaque i , posons $d_i = \sqrt{\lambda_i}$. Posons encore $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. D'après le théorème spectral, on sait que S est orthogonalement semblable à $D^2 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^2P^{-1}$ alors $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = D^2$.

b. Puisque

$${}^t(AP)(AP) = P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = {}^t(BP)BP = D^2,$$

d'après la question 9.c., il existe deux matrices orthogonales E et E' telles que $AP = ED$ et $BP = E'D$. Donc,

$$A = EDP^{-1} = EE'^{-1}E'DP^{-1} = EE'^{-1}B.$$

Posons $U = EE'^{-1}$. U est un produit de matrices orthogonales et donc, U est une matrice orthogonale. De plus, $A = UB$.

(On peut noter que la réciproque est aussi vraie : ${}^tAA = {}^tB^tUUB = {}^tBB$).

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice tAA est une matrice symétrique réelle positive et il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients réels positifs telles que ${}^tAA = PD^2P = {}^t(D^tP)({}^tPD)$.

D'après la question 10., il existe une matrice orthogonale U_0 telle que $A = U_0(D^tP) = (U_0{}^tP)(PD^tP)$. Posons $U = U_0{}^tP$ et $S = PD^tP$. U est orthogonale en tant que produit de deux matrices orthogonales et S est symétrique positive car orthogonalement semblable à une matrice diagonale positive. On a montré que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / A = US.$$

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

12. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\|M\Omega\|^2 = \text{Tr}({}^t(M\Omega)M\Omega) = \text{Tr}({}^t\Omega^tMM\Omega) = \text{Tr}(\Omega^t\Omega^tMM) = \text{Tr}({}^tMM) = \|M\|^2,$$

et donc $\|M\Omega\| = \|M\|$. De même, $\|\Omega M\| = \|M\|$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|.$$

13. a. $\|A - \Omega\| = \|U S - \Omega\| = \|U(S - U^{-1}\Omega)\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ (d'après la question 12.).

Maintenant, l'application $\Omega \mapsto U^{-1}\Omega$ est une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (de réciproque $\Omega \mapsto U\Omega$). Donc, quand la matrice Ω décrit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\Omega' = U^{-1}\Omega$ décrit aussi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Donc,

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - \Omega\| = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - U^{-1}\Omega\| = \inf_{\Omega' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - \Omega'\| = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

Donc,

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

b. $\|S - \Omega\| = \|P D P^{-1} - \Omega\| = \|P(D - P^{-1}\Omega P)\| = \|D - P^{-1}\Omega P\|$ (toujours d'après la question 12.). Or, l'application $\Omega \mapsto P^{-1}\Omega P$ est une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (de réciproque $\Omega \mapsto P\Omega P^{-1}$). Donc comme précédemment,

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

14. a. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|D - \Omega\|^2 &= \text{Tr}({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)) = \text{Tr}(D^2) - \text{Tr}(D\Omega) - \text{Tr}({}^t(D\Omega)) + \text{Tr}(I_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\text{Tr}(D\Omega) + n. \end{aligned}$$

b. Notons $\omega_1, \dots, \omega_n$ les coefficients diagonaux de la matrice Ω . La valeur absolue des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieurs à 1 et en particulier, les ω_i sont inférieurs ou égaux à 1. Mais alors, puisque les λ_i sont positifs,

$$\text{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

c. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après la question b., on a

$$\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\text{Tr}(D\omega) + n \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i + n = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 1) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2 = \|D - I_n\|^2,$$

avec égalité effectivement obtenue pour $D = I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|.$$

15. D'après la question 12., on a

$$\|D - I_n\| = \|P(D - I_n)P^{-1}\| = \|S - I_n\| = \|U(S - I_n)\| = \|A - U\|,$$

et donc,

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|.$$

16. $d(\Gamma, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$ où $D = \text{diag}(1, 1, 4)$ et donc $D - I_3 = \text{diag}(0, 0, 3)$. On en déduit que

$$d(\Gamma, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = 3.$$

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p .

17. a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons χ_M le polynôme caractéristique de M . Si χ_M n'a pas de racine réelle non nulle, on prend $\alpha = 1$. Si χ_M a au moins une racine réelle non nulle, celles-ci sont en nombre fini et on peut prendre pour α la plus petite valeur absolue d'une racine non nulle de χ_M . Dans tous les cas, α est un réel strictement positif tel que χ_M n'admette pas de racine dans $]0, \alpha[$ ou encore tel que pour $\lambda \in]0, \alpha[$, la matrice $M - \lambda I_n$ soit inversible.

b. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un réel λ dans $]0, \min\left\{\alpha, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\}[$. D'une part, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible et d'autre part,

$$\|M - (M - \lambda I_n)\| = \|\lambda I_n\| = \lambda\sqrt{n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists N \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) / \|M - N\| < \varepsilon.$$

Par suite,

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une matrice M inversible, et donc de rang au moins p telle que $\|A - M\| < \varepsilon$. Par suite, pour tout réel strictement positif ε , $d(A, \Delta_p) \leq \varepsilon$ et donc

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(A, \Delta_p) = 0.$$

V. Calcul de la distance de A à ∇_p .

A. Théorème de COURANT et FISCHER

19. Puisque la famille $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel, on a

$${}^tXX = X|X = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Ensuite, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et donc

$${}^tXAX = \left(\sum_{i=1}^n x_i C_i\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j AC_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i C_i\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j C_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Par suite,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0\}, \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

En particulier,

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{{}^tC_k AC_k}{{}^tC_k C_k} = \lambda_k.$$

20. Soit X un vecteur non nul de F_k . Puisque $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$,

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_k {}^tXX.$$

Donc, pour tout vecteur non nul X de F_k , on a $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \lambda_k$. D'autre part, pour $X = C_k$ (qui est un vecteur non nul de F_k), on a $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k} = \lambda_k$ et donc,

$$\min_{X \in F_k \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.$$

21. a.

$$\begin{aligned} \dim(F \cap \text{vect}(C_k, \dots, C_n)) &= \dim(F) + \dim(\text{vect}(C_k, \dots, C_n)) - \dim(F + \text{vect}(C_k, \dots, C_n)) \\ &= k + (n - k + 1) - \dim(F + \text{vect}(C_k, \dots, C_n)) = n + 1 - \dim(F + \text{vect}(C_k, \dots, C_n)) \\ &\geq n + 1 - n = 1. \end{aligned}$$

$$\forall F \in \Psi_k, \dim(F \cap \text{vect}(C_k, \dots, C_n)) \geq 1.$$

b. Il existe donc un vecteur X non nul dans $F \cap \text{vect}(C_k, \dots, C_n)$. On a alors

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_k {}^tXX,$$

et donc, il existe un vecteur non nul de F tel que $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$. On en déduit que

$$\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k.$$

22. D'après la question 20., il existe un sous-espace F de dimension k (à savoir $F = F_k$) tel que $\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$. Par suite,

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq \lambda_k.$$

Mais, d'après la question 21., pour tout sous-espace F de dimension k , on a $\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$, et donc

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leq \lambda_k.$$

Finalement,

$$\max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.$$

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Puisque $r > p$, A n'est pas dans ∇_p .

23. D'après la question 11., il existe une matrice orthogonale U et une matrice symétrique positive S telles que $A = US$. Il existe d'autre part une matrice orthogonale P' et une matrice diagonale positive D telles que $S = P'D^tP'$. On prend $P = {}^tP'$ puis $E = UP'$. E et P sont des matrices orthogonales et D est une matrice diagonale à coefficients positifs telles que $A = EDP$.

Puisque E et P sont inversibles, le rang de A est le rang de D . D'autre part,

$${}^tAA = {}^tPD^tEEDP = {}^tPD^2P.$$

Le rang de tAA est donc le rang de D^2 . Maintenant, D étant diagonale, le rang de D est le nombre de coefficients non nuls de D . Les coefficients de D^2 étant les carrés des coefficients de D , ce nombre est également le rang de D^2 . On a montré que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}A.$$

24.

$$A = EDP = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} M_l P.$$

Pour chaque l , posons alors $R_l = M_l P$. Puisque P est inversible, le rang de R_l est le rang de M_l à savoir 1 puisque M_l contient une et une seule colonne non nulle (les colonnes d'une matrice orthogonale étant toutes non nulles). D'autre part, pour $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$\text{Tr}({}^tR_k R_l) = \text{Tr}(P^{-1} {}^tM_k M_l P) = \text{Tr}({}^tM_k M_l).$$

Maintenant, le coefficient ligne i , colonne i de ${}^tM_k M_l$ est le produit scalaire usuel de la i -ème colonne de M_k par la i -ème colonne de M_l et vaut donc $\delta_{i,k} \delta_{i,l}$. Si $k \neq l$, ces coefficients sont tous nuls et dans ce cas, $\text{Tr}({}^tM_k M_l) = 0$. Si $k = l$, tous ces coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne k , colonne k qui vaut 1. Dans ce cas, $\text{Tr}({}^tM_k M_l) = 1$. En résumé,

$$\forall (k, l) \in \{1, \dots, n\}^2, R_k | R_l = \text{Tr}({}^tR_k R_l) = \delta_{k,l},$$

et la famille $(R_k)_{1 \leq k \leq n}$ est bien une famille orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25. Le rang de N est encore le rang de $NP^{-1} = \sum_{l=1}^p \sqrt{\mu_l} M_l$. Mais les $n - p$ dernières colonnes de la matrice NP^{-1} sont nulles et donc $\text{rg}(NP^{-1}) \leq p$, ou encore

$$N \in \nabla_p.$$

Puisque la famille (R_l) est orthonormée, on a alors

$$d(A, \nabla_p)^2 \leq \|A - N\|^2 = \left\| \sum_{l=p+1}^r \sqrt{\mu_l} R_l \right\|^2 = \sum_{l=p+1}^r (\sqrt{\mu_l})^2 = \mu_{p+1} + \dots + \mu_r,$$

et donc,

$$d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}.$$

26. a. D'après la question 23., $\text{rg}({}^tAA) = r$ et donc,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}M \cap \text{Im}({}^tAA)) &= \dim(\text{Ker}(M)) + \dim(\text{Im}({}^tAA)) - \dim(\text{Ker}M + \text{Im}({}^tAA)) \\ &= (n - p) + r - \dim(\text{Ker}M + \text{Im}({}^tAA)) \\ &\geq (n - p) + r - n = r - p. \end{aligned}$$

b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k . D'après la question 21.b.,

$$\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tX^t(A - M)(A - M)X}{{}^tXX} \leq \alpha_k,$$

Maintenant, les vecteurs X considérés étant dans le noyau de M , on a

$${}^tX^t(A - M)(A - M)X = {}^tX^t(A - M)AX = {}^tX^tAAX - {}^t(MX)AX = {}^tX^tAAX.$$

Donc

$$\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^tX^tAAX}{{}^tXX} \leq \alpha_k.$$

c. On a $1 \leq k \leq r - p$ et donc $k + p \leq r$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, \dots, k + p \rrbracket$, on a donc $\mu_i \neq 0$. Mais alors

$$V_i = \frac{1}{\mu_i} {}^t A A V_i \in \text{Im}({}^t A A).$$

Par suite, $\text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k}) \subset \text{Im}({}^t A A)$. On en déduit que

$$G \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k}) = \text{Ker} M \cap \text{Im}({}^t A A) \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k}) = \text{Ker} M \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k}).$$

On en déduit, comme à la question a., que $\dim(G \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k})) \geq (n - p) + (p + k) - n = k$.

$$\dim(G \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k})) \geq k.$$

d. On peut donc choisir un sous-espace F de dimension k dans $G \cap \text{vect}(V_1, \dots, V_{p+k})$. D'après b., on a

$$\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^t X {}^t A A X}{{}^t X X} \leq \alpha_k.$$

D'autre part, pour $X \in F$, on peut poser $X = \sum_{i=1}^{k+p} x_i V_i$. On a alors (puisque la famille (V_1, \dots, V_{k+p}) est orthonormée)

$${}^t X {}^t A A X = {}^t \left(\sum_{i=1}^{k+p} x_i V_i \right) \left(\sum_{j=1}^{k+p} x_j \mu_j V_j \right) = \sum_{i=1}^{k+p} \mu_i x_i^2 \geq \mu_{k+p} \sum_{i=1}^{k+p} x_i^2 = \mu_{k+p} {}^t X X.$$

Donc, si X est un vecteur non nul de F , $\frac{{}^t X {}^t A A X}{{}^t X X} \geq \mu_{k+p}$ et en particulier,

$$\min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{{}^t X {}^t A A X}{{}^t X X} \geq \mu_{k+p}.$$

Finalement,

$$\alpha_k \geq \mu_{k+p}.$$

27. Le travail précédent est valable si on suppose que M est de rang inférieur ou égal à p . Soit M une matrice de rang $q \leq p < r$.

$$\|A - M\|^2 = \text{Tr}({}^t(A - M)(A - M)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{r-p} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{r-p} \mu_{i+p} = \sum_{k=p+1}^r \mu_k.$$

Par suite, pour toute $M \in \nabla_p$, $\|A - M\| \geq \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}$ et, compte tenu de la question 25.,

$$d(A, \nabla_p) = \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}.$$

28. Γ est de rang $r = 3$. Les valeurs propres de Γ sont $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1$ et $\mu_3 = 1$.

Donc, $d(\Gamma, \nabla_0) = \sqrt{16 + 1 + 1} = 3\sqrt{2}$, $d(\Gamma, \nabla_1) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $d(\Gamma, \nabla_2) = \sqrt{1} = 1$. Enfin, comme Γ est dans $\nabla_3 = \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$, $d(\Gamma, \nabla_3) = 0$.