

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI SESSION 2003

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) est l'anneau des matrices carrées 3×3 à coefficients dans \mathbb{C} (resp. dans \mathbb{R}). On

note I la matrice identité, et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dite de Frobenius.

L'objet de ce problème est d'étudier le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par F , et d'en donner quelques applications. Les parties **II** et **III** sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : *Dans toute cette partie, on travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*

1. Soit $\chi_F(t) = \det(FtI)$ le polynôme caractéristique de F . Donner $\chi_F(t)$ et en déduire que F est diagonalisable sur \mathbb{C} . On posera $j = \exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$.

2. On note :

$$\mathcal{A} = \left\{ xI + yF + zF^2, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

a/ Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, dont on donnera une base et la dimension.

b/ Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{A} est commutatif et reste dans \mathcal{A} .

3. Montrer que tous les éléments de \mathcal{A} sont diagonalisables dans une même base.

4. Déterminer alors une expression factorisée du déterminant des matrices $A = xI + yF + zF^2$ en fonction de x, y, z , puis donner une condition d'inversibilité de ces matrices.

5. Soit $A \in \mathcal{A}$, A inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in \mathcal{A}$. Pour cela, on considère l'application $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, M \mapsto AM$.

a/ Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de \mathcal{A} .

b/ Montrer que c'est un isomorphisme puis que $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

c/ Proposer une méthode pour vérifier cette conclusion ($A^{-1} \in \mathcal{A}$) en utilisant l'outil calcul formel.

Partie II : Soit ε_3 un espace affine euclidien réel de dimension 3, d'espace vectoriel associé E_3 .

On rapporte ε_3 (resp. E_3) à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$). On note classiquement $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (resp. $\vec{u} \wedge \vec{v}$) le produit scalaire (resp. vectoriel) de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ la norme euclidienne d'un vecteur \vec{u} .

On considère l'ensemble \mathcal{S} des points M de ε_3 défini par :

$$\mathcal{S} = \{M(x, y, z) \in \varepsilon_3, \det(xI + yF + zF^2) = 1 \text{ où } x, y, z \text{ sont réels}\}.$$

On étudie quelques propriétés de \mathcal{S} dans cette partie.

1. Écrire une équation cartésienne de \mathcal{S} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On vérifiera que cette équation peut se factoriser en :

$$(x + y + z)q(x, y, z) = 1,$$

où $q(x, y, z)$ est une quantité à expliciter. En déduire que :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a}) \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = 1$$

avec $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

On obtient ainsi une caractérisation géométrique de \mathcal{S} .

2. En déduire que \mathcal{S} est une surface de révolution autour de l'axe Δ passant par O et dirigé par \vec{a} . On pourra introduire le projeté orthogonal H de M sur Δ .

3. a/ Donner une équation cartésienne de \mathcal{S} dans un repère orthonormé attaché à l'axe de révolution et d'origine O . On posera $\vec{K} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ et on choisira par conséquent deux vecteurs \vec{I} et \vec{J} (qu'il n'est pas utile d'explicitier). On pourra utiliser la caractérisation géométrique de \mathcal{S} donnée en 1.

b/ En déduire la nature des méridiennes de \mathcal{S} , c'est-à-dire des courbes intersection de \mathcal{S} avec un plan contenant l'axe. En dessiner une, puis représenter \mathcal{S} dans l'espace.

4. Pour $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ et $M'(x', y', z') \in \mathcal{S}$, on définit le point $M''(x'', y'', z'') = M * M'$ par :

$$x'' = xx' + yz' + zy', \quad y'' = xy' + yx' + zz', \quad z'' = xz' + yy' + zx'.$$

a/ En calculant $(xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2)$, montrer que $M'' \in \mathcal{S}$. On a ainsi muni \mathcal{S} d'une loi interne $*$.

b/ Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$. On pose $A = (xI + yF + zF^2)$. Justifier que A^{-1} existe et peut se décomposer en : $A^{-1} = x'I + y'F + z'F^2$ avec $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et que $M'(x', y', z') \in \mathcal{S}$. Déterminer $M * M'$.

c/ Montrer alors que $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

5. Soient \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ et $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$.

a/ Reconnaître \mathcal{C} et en donner les éléments caractéristiques.

b/ Montrer que \mathcal{C} est stable par la loi $*$, puis que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, *)$.

Partie III : Dans cette partie, on se place toujours dans l'espace affine euclidien réel ε_3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de ε_3 , on note indifféremment $\varphi(M)$ ou $\varphi(x, y, z)$ la quantité :

$$\varphi(x, y, z) = \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| + \|\overrightarrow{CM}\|.$$

On souhaite minimiser cette quantité.

1. Calculer $\varphi(O)$. Vérifier que pour tout $M \in \varepsilon_3$ tel que $\|\overrightarrow{OM}\| > 3$, $\varphi(x, y, z) > 3$. En déduire que la fonction φ admet un minimum.
2. Montrer que φ n'atteint son minimum en aucun des points O, A, B, C . Pour l'étude en O , on pourra examiner le comportement de φ au voisinage de O , le long de l'axe Δ passant par O et dirigé par $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; et donc définir pour l'occasion la quantité $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$.
Les questions suivantes précisent en quel(s) point(s) φ est minimale.
3. Soit r l'application affine de ε_3 fixant O et transformant A en C , B en A et C en B . On note \overrightarrow{r} son application linéaire associée. Justifier que r est bien définie, que la matrice de \overrightarrow{r} relativement à la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est F , et montrer que \overrightarrow{r} est une isométrie vectorielle. Quelle est la nature de r ? On précisera ses éléments caractéristiques.
4. Pour tout $M \in \varepsilon_3$, on pose $M' = r(M)$. Montrer que $\varphi(M) = \varphi(M')$.
5. Soit P un point en lequel φ est minimale. On montre dans cette question que P est sur la droite Δ . Pour cela, on procède par l'absurde, *en supposant que P n'est pas sur cette droite.*
 - a/ Soit $P' = r(P)$. Pourquoi les vecteurs \overrightarrow{OP} et $\overrightarrow{OP'}$ ne peuvent-ils pas être colinéaires?
 - b/ Soit $P'' = r(P') = r^2(P)$ et soit Q l'isobarycentre de P, P' et P'' .
Montrer que $\varphi(Q) \leq \frac{1}{3}(\varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P''))$.
 - c/ Déduire du 4 que $\varphi(Q) \leq \varphi(P)$, et du 5.a. que cette inégalité est en fait stricte. Conclure.
6. On sait désormais qu'on doit rechercher le minimum sur l'axe Δ . Il s'agit donc de minimiser $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$.
 - a/ Montrer que $\Phi(x) > \Phi(0)$ pour tout $x < 0$.
 - b/ Étudier le sens de variation de la fonction Φ sur \mathbb{R}_+ .
 - c/ Conclure que φ atteint une seule fois son minimum, au point $P\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, et que ce minimum vaut $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Fin de l'énoncé