
MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1 Soient $s \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \geq 1$, $\frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. D'après la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série entière proposée est égal à 1.

$$\boxed{R = 1.}$$

I.2 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Posons $z = e^{i\theta}$.

I.2.1 Si $s > 1$, comme $\left|\frac{z^n}{n^s}\right| = \frac{1}{n^s}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n^s}$ converge absolument. Si $s \leq 0$, comme $\left|\frac{z^n}{n^s}\right| = \frac{1}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série de terme général $\frac{z^n}{n^s}$ diverge grossièrement.

I.2.2 Si $0 < s \leq 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ diverge.

I.2.3 Soit $s \in]0, 1[$. On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \quad (\text{car } e^{i\theta} \neq 1) \\ &= \left| e^{i\theta(1 - \frac{1}{2} + \frac{n}{2})} \frac{e^{-in\theta/2} - e^{in\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \right| = \left| \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \text{ ce qui reste vrai pour } n = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, |S_n| \leq M(\theta) \text{ où } M(\theta) = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.}$$

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $z^k = S_k - S_{k-1}$ (y compris quand $k = 1$) et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k &= \sum_{k=1}^n k^{-s} (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^n k^{-s} S_{k-1} = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-s} S_k \\ &= S_n n^{-s} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{-s} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}] + S_n n^{-s} \end{aligned}$$

Montrons alors que la série de terme général $S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}]$ est absolument convergente.

Pour $k \geq 1$, puisque $s > 0$, $k^{-s} - (k+1)^{-s} > 0$ et donc

$$|S_k (k^{-s} - (k+1)^{-s})| = |S_k| (k^{-s} - (k+1)^{-s}) \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} (k^{-s} - (k+1)^{-s}),$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série télescopique convergente (puisque n^{-s} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$). Par suite, la série de terme général $S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}]$ est absolument convergente.

Comme d'autre part, la suite $(S_n n^{-s})$ est convergente (de limite nulle puisque la suite (S_n) est bornée et que n^{-s} tend vers 0), la série de terme général $n^{-s} z^n$ est convergente.

I.3 I.3.1 Soit $(x, s) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}$. Posons $J = [0, x]$ si $x \geq 0$ et $J = [x, 0]$ si $x \leq 0$.

Pour $t \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(t) = n^{-s} t^{n-1}$, puis $\psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Cette série entière a encore un rayon de convergence égal à 1 et pour $t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $\psi(t) = \frac{\varphi(t, s)}{t}$. Puisque ψ est continue sur $] - 1, 1[$ (en tant que somme d'une série entière sur $] - 1, 1[$), la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t, s)}{t}$ est continue sur $J \setminus \{0\}$ et se prolonge par continuité en 0. On en déduit l'existence de $\int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$.

On sait alors que la série entière de terme général g_n converge uniformément sur tout segment contenu dans $] - 1, 1[$ et en particulier, converge uniformément sur le segment J . On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt &= \int_0^x \psi(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} t^{n-1} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x n^{-s} t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} x^n \\ &= \varphi(x, s+1). \end{aligned}$$

$$\forall (x, s) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}, \quad \varphi(x, s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt.$$

I.3.2 Soit $x \in]-1, 1[$. $\varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\varphi(x, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi(x, 0) = \frac{1}{1-x} \text{ et } \varphi(x, 1) = -\ln(1-x).$$

I.4 Soit s un réel strictement supérieur à 1.

I.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $s > 1$, la fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et puisque $n > 0$, la fonction f_n est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Posons alors $u = nt$ ou encore $t = \frac{u}{n}$ et donc $dt = \frac{1}{n} du$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} n^{-(s-1)} n^{-1} du = n^{-s} \Gamma(s).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = n^{-s} \Gamma(s).$$

I.4.2) Soit z un complexe de module inférieur ou égal à 1.

- Chaque fonction $h_n : t \mapsto z^n f_n(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $]0, +\infty[$ car $|h_n| \leq f_n$.
- Puisque pour $t > 0$, $|ze^{-t}| \leq e^{-t} < 1$, la série de fonction de terme général h_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction h telle que, pour tout réel $t > 0$,

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-nt} t^{s-1} dt = ze^{-t} t^{s-1} \times \frac{1}{1 - ze^{-t}} = z \frac{t^{s-1}}{e^t - z}.$$

• Enfin,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

et puisque $s > 1$, la série numérique de terme général $\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt$ converge.

On sait alors que l'on peut intégrer terme. On obtient

$$\begin{aligned} z \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n n^{-s} \Gamma(s) = \Gamma(s) \varphi(z, s). \end{aligned}$$

Maintenant, $\Gamma(s)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$, et donc, $\Gamma(s) \neq 0$. On a montré que

$$\forall s \in]1, +\infty[, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \Rightarrow \varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

Partie II

II.1 Pour $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n(s) = n^{-s}$. Chaque u_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > 1$,

$$u_n^{(k)}(s) = (-1)^k (\ln(n))^k n^{-s}.$$

Soient alors a un réel strictement supérieur à 1 et k un entier naturel. Pour tout entier non nul n et tout $s \in [a, +\infty[$,

$$|u_n^{(k)}(s)| = \frac{(|\ln(n)|)^k}{n^s} \leq \frac{(|\ln(n)|)^k}{n^a},$$

ou encore

$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{(|\ln(n)|)^k}{n^a}.$$

Mais d'après les théorèmes de croissances comparées, $\frac{(|\ln(n)|)^k}{n^a} \times n^{(1+a)/2} = \frac{(|\ln(n)|)^k}{n^{(a-1)/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\frac{(|\ln(n)|)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{(1+a)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^{(1+a)/2}}$ est une série de RIEMANN convergente.

On en déduit que la série de terme général $\|u_n^{(k)}\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général $u_n^{(k)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé, pour tout réel $a > 1$,

- La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction u_n est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout entier naturel non nul k , la série de fonctions de terme général $u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[, \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k (\ln(n))^k n^{-s}.$$

II.2 Soit $(s, t) \in]1, +\infty[^2$ tel que $s < t$. Alors

$$\zeta(s) - \zeta(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^t} \right) \geq \frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^t} > 0.$$

La fonction ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

II.3 Soit $s \in]1, +\infty[$. Puisque $s > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{-s}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Par suite, pour $n \geq 1$, on a

$$(n+1)^{-s} \leq \int_n^{n+1} t^{-s} dt \leq n^{-s}.$$

On somme alors ces inégalités pour n variant de 1 à $+\infty$ et on obtient

$$0 \leq \zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{-s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt = \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

$$\forall s \in]1, +\infty[, 0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s).$$

Ceci fournit

$$\forall s > 1, \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1,$$

ou encore,

$$\forall s > 1, 1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$

Quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, $(s-1)\zeta(s)$ tend donc vers 1. On en déduit que

$$\zeta(s) \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\sim} \frac{1}{s-1} \text{ et en particulier } \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \zeta(s) = +\infty.$$

Partie III

III.1 **III.1.1** g est 2π -périodique et donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $g(2k\pi) = g(0) = \frac{\pi^2}{4}$ et en particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(-2k\pi) = g(2k\pi)$, ce qui montre que, pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $g(-x) = g(x)$.

Soit $x \in]2\pi, 0[$. Alors, $-x \in]-2\pi, 0[$ puis $-x + 2\pi \in]0, 2\pi[$ et

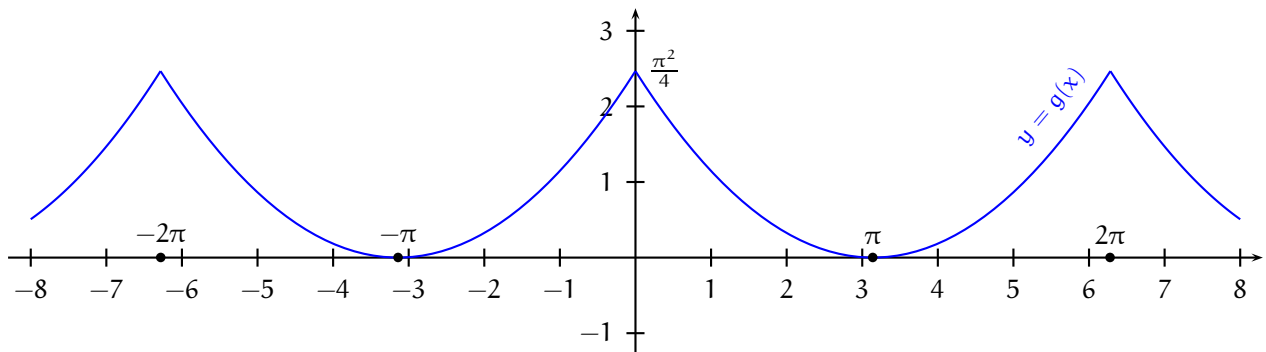
$$g(-x) = g(-x + 2\pi) = \left(\frac{\pi - (-x + 2\pi)}{2} \right)^2 = \left(\frac{x - \pi}{2} \right)^2 = g(x).$$

Soit alors $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe un entier relatif k tel que $0 < x - 2k\pi < 2\pi$ ce qui s'écrit aussi $-2\pi < -x + 2k\pi < 0$ et

$$g(-x) = g(-x + 2k\pi) = g(-(-x + 2k\pi)) = g(x - 2k\pi) = g(x).$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x) \text{ ou encore } g \text{ est paire.}$$



g est 2π -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} . On peut donc calculer les coefficients de FOURIER de g . Puisque g est paire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2 \cos(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (t-\pi)^2 \cos(nt) dt.$$

Ainsi,

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (t-\pi)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(t-\pi)^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6},$$

puis, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2\pi a_n(g) &= \int_0^\pi (t-\pi)^2 \cos(nt) dt = \left[(t-\pi)^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi (t-\pi) \sin(nt) dt = \frac{2}{n} \int_0^\pi (t-\pi)(-\sin(nt)) dt \\ &= \frac{2}{n} \left(\left[(t-\pi) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) = \frac{2\pi}{n^2} \end{aligned}$$

et donc $a_n(g) = \frac{1}{n^2}$.

$$a_0(g) = \frac{\pi^2}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(g) = \frac{1}{n^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(g) = 0.$$

g est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} ($g(2\pi^-) = \frac{\pi^2}{4} = g(2\pi)$), de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} ($g'(2\pi^-) = \frac{\pi}{2}$), et d'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de g converge en tout réel x vers $g(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g) \cos(nx) + b_n(g) \sin(nx)) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2},$$

et en particulier,

$$\forall x \in [0, 2\pi], \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2.$$

III.1.2 Pour $x = 0$, on obtient en particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensuite, la formule de PARSEVAL (valable puisque g est 2π -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R}) s'écrit

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(t) dt$$

et fournit ici

$$\frac{\pi^4}{72} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t-\pi}{2}\right)^4 dt = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{(t-\pi)^5}{5} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{16\pi} \times \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi^4}{40}.$$

Mais alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{40} - \frac{\pi^4}{72} = \frac{(9-5)\pi^4}{5 \times 8 \times 9} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

III.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

III.2.1 $\operatorname{Re} \varphi(\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} \varphi(\theta) = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

III.2.2 Mais alors, d'après la question I.4.2,

$$\begin{aligned} g(\theta) - \frac{\pi^2}{12} &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta}}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - e^{i\theta}} dt \right) = \frac{1}{\Gamma(2)} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t(\cos \theta + i \sin \theta)(e^t - \cos \theta + i \sin \theta)}{(e^t - e^{i\theta})(e^t - e^{-i\theta})} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt. \end{aligned}$$

Maintenant $\Gamma(2) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} ([-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t} dt) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A} - Ae^{-A}) = 1$ et on a montré que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

III.2.3 Les trois fonctions considérées sont continues sur $]0, +\infty[$, prolongeables par continuité en 0 et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Par suite, les trois intégrales proposées existent.

Pour $\theta = 0$, on obtient $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t - 1)}{(e^t - 1)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ et donc,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $\theta = \pi$, on obtient $-\frac{\pi^2}{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t(-e^t - 1)}{(e^t + 1)^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt$ et donc,

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

Maintenant,

$$I_1 + I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2te^t}{e^{2t} - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(e^t - e^{-t})/2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt = I_3,$$

et donc

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

III.3 Soit $s > 0$.

III.3.1 D'après la question I.4.2, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(e^{i\theta}, s + 1) = \frac{e^{i\theta}}{\Gamma(s + 1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - e^{i\theta}} dt,$$

et donc,

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^s (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2t \cos \theta + 1} dt = \operatorname{Re}(\varphi(e^{i\theta}, s+1)) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{s+1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos(n\theta),$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^s e^t \sin \theta}{e^{2t} - 2t \cos \theta + 1} dt = \operatorname{Im}(\varphi(e^{i\theta}, s+1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin(n\theta).$$

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{t^s (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2t \cos \theta + 1} dt &= \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos(n\theta) \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{t^s e^t \sin \theta}{e^{2t} - 2t \cos \theta + 1} dt &= \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin(n\theta). \end{aligned}$$

III.3.2 On a $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^s e^t}{e^{2t} + 1} dt$. $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la deuxième formule de la question I.3.1, fournit alors

$$I(s) = 2\Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 2\Gamma(s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)}.$$

Donc,

$$\forall s > 0, I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch} t} dt = 2\Gamma(s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)} = 2\Gamma(s+1)S_2(s).$$

Ensuite, puisque $\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^t + 1} = \frac{2e^t}{e^{2t} - 1} = \frac{1}{\operatorname{sh} t}$, on a $J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t + 1} dt$.

Or, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ dans la première formule de la question III.3.1, fournissent respectivement

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}$$

et

$$-\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-(s+1)}.$$

Donc,

$$J(s) = \Gamma(s+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-(s+1)} \right) = 2\Gamma(s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)} = 2\Gamma(s+1)S_1(s).$$

$$\forall s > 0, J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{sh} t} dt = 2\Gamma(s+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)} = 2\Gamma(s+1)S_1(s).$$