

## CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

## EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

## MATHÉMATIQUES 1

## PREMIER EXERCICE

a.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{T}} (x+y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{y=-x}^{y=1} (x+y) \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( (x + \frac{1}{2}) - (-x^2 + \frac{x^2}{2}) \right) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{T}} (x+y) \, dx \, dy = \frac{4}{3}.}$$

b. Par symétrie,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{C}} |x+y| \, dx \, dy = 2 \iint_{\mathcal{T}} (x+y) \, dx \, dy = \frac{8}{3}.}$$

## DEUXIEME EXERCICE

1 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto \frac{-n}{x}$  est continue sur  $I$  (resp.  $J$ ). Les solutions de  $(E_n)$  sur  $I$  (resp.  $J$ ) constituent donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1. La fonction  $x \mapsto x^n$  est une solution particulière non nulle de  $(E_n)$  sur  $I$  (resp.  $J$ ). Donc, les solutions de  $(E_n)$  sur  $I$  (resp.  $J$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Cx^n$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

2. Une éventuelle solution  $f$  de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  doit vérifier :  $f|_{]0,+\infty[}$  est solution de  $(E_1)$  sur  $]0,+\infty[$ ,  $f|_{]-\infty,0[}$  est solution de  $(E_1)$  sur  $]-\infty,0[$  et enfin  $f(0) = 0$ .

Par suite, il existe deux constantes réelles  $C_1$  et  $C_2$  telles que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \begin{cases} C_1 x & \text{si } x \geq 0 \\ C_2 x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Réciproquement, une telle fonction est solution de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle est dérivable en 0 ce qui équivaut à  $C_1 = C_2$  (graphiquement clair).

Les solutions de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Cx$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Elles constituent un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1.

3. Soit  $n \geq 2$ . De même, si  $f$  est une solution de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$ , il existe nécessairement deux constantes réelles  $C_1$  et  $C_2$  telles que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \begin{cases} C_1 x^n & \text{si } x \geq 0 \\ C_2 x^n & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Réciproquement, une telle fonction est solution de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle est dérivable en 0, ce qui est le cas pour tout choix de  $C_1$  et  $C_2$  (graphiquement clair :  $f'(0) = 0$ ).

Les solutions de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 x^n & \text{si } x \geq 0 \\ C_2 x^n & \text{si } x < 0 \end{cases} = C_1 \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} + C_2 \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^n & \text{si } x < 0 \end{cases} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x), \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La famille  $(f_1, f_2)$  étant clairement libre, les solutions de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}$  constituent un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

# PROBLEME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

## I. GENERALITES

1. a. Posons  $a_0 = 0$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . La série entière  $\sum a_n x^n$  a un rayon de convergence égal à 1 et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)$  et la suite  $(a_n)$  vérifie  $(\mathcal{P}_2)$ . D'autre part, la série de terme général  $a_n$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la suite  $a_n$  vérifie  $(\mathcal{P}_1)$ .

b. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = (-1)^n$ . La série de terme général  $a_n$  diverge grossièrement et la suite  $(a_n)$  ne vérifie donc pas  $(\mathcal{P}_1)$ . La série entière  $\sum a_n x^n$  a un rayon de convergence égal à 1 et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

La fonction  $f$  tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures et la suite  $(a_n)$  vérifie  $(\mathcal{P}_2)$ .

c. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = 1$ .  $(a_n)$  ne vérifie pas  $(\mathcal{P}_1)$  car la série de terme général  $a_n$  diverge grossièrement et ne vérifie pas  $(\mathcal{P}_2)$  car  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

d. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $a_n = (-1)^n$  et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f_n(x) = a_n x^n = (-1)^n x^n$ . Chaque fonction  $f_n$  a une limite  $\ell_n$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir  $\ell_n = (-1)^n$ . Si la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge uniformément sur  $] -1, 1[$ , le théorème d'interversion des limites affirme alors que la série numérique de terme général  $\ell_n$  converge, ce qui n'est pas. Donc, la série de fonctions de terme général  $f_n$  ne converge pas uniformément sur  $] -1, 1[$ .

2. Pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n(x) = a_n x^n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]-1, 1[$ ,  $|f_n(x)| = |a_n| \cdot |x|^n \leq |a_n|$ . Par suite, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq |a_n|$ . On en déduit que la série de terme général  $\|f_n\|_\infty$  converge.

Ainsi, la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $] -1, 1[$ . Puisque chaque fonction  $f_n$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir  $a_n$ , le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que  $f$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

3. Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n = x \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x \end{aligned}$$

Maintenant, la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$  est absolument convergente car, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \right| = \frac{1}{n(n-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'après la question 2., on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x) = 2 \ln 2 - 1.$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2 \ln 2 - 1.}$$

## II. THEOREME D'ABEL

4. a. Soient  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Puisque pour tout naturel  $p$ ,  $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$ , on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p}x^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n(x).$$

b. Soient  $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} &= x \sum_{p=1}^N r_{n+p-1}x^{n+p-1} - \sum_{p=1}^N r_{n+p}x^{n+p} = x \sum_{p=0}^{N-1} r_{n+p}x^{n+p} - \sum_{p=1}^N r_{n+p}x^{n+p} \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p}x^{n+p} - r_{n+N}x^{n+N} \\ &= r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p}x^{p-1} - r_{n+N}x^{n+N}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, puisque la série de terme général  $a_n$  converge, la suite des restes  $(r_n)$  est définie et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Puisque  $x \in ]0, 1[$ , il en est de même de la suite  $(r_{n+N}x^{n+N})_{N \geq 1}$ .

Mais alors, puisque pour  $x \in ]0, 1[$ , on a

$$\sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p}x^{p-1} = \frac{1}{x^{n+1}(x-1)} \left( \sum_{p=1}^N (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} - r_n x^{n+1} + r_{n+N}x^{n+N} \right),$$

on en déduit que la suite  $(\sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p}x^{p-1})_{N \geq 1}$  converge ou encore que la série de terme général  $r_{n+p}x^{p-1}$ ,  $p \geq 1$ , converge. Quand  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{p-1},$$

cette égalité restant claire pour  $x = 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p}x^{p-1}.$$

c. Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque la suite des restes  $(r_n)$  est définie et converge vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$  et tout entier naturel  $p$ ,  $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soient alors  $n \geq n_0$  et  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq |r_n|x^{n+1} + x^{n+1}(1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} |r_{n+p}|x^{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}x^{n+1}(1 + (1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}x^{n+1}(1 + (1-x)\frac{1}{1-x}) = 2\frac{\varepsilon}{2}x^{n+1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De plus,  $|R_n(1)| = |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ .

d. On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], (n \geq n_0 \Rightarrow |R_n(x)| \leq \varepsilon)$ .

Ainsi, la suite de fonctions  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment  $[0, 1]$  ou encore la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto a_n x^n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Puisque chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et en particulier, a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures égale à  $f(1)$ . On a montré que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

5. D'après la question 4., si  $\sum a_n$  converge,  $f$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures. Donc, si  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $\sum a_n$  diverge.

6. On sait que pour tout réel  $x$  de  $] -1, 1[$ ,

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge en vertu du critère spécial aux séries alternées, le théorème d'ABEL établi à la question 4. permet d'affirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

7. a. Le terme général du produit de CAUCHY des séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  est

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{1/4}} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{1/4}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{1/4}}.$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$0 < k(n-k) = -k^2 + kn = -(k - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n^2}{4},$$

et donc

$$|w_n| \geq (n-1) \frac{1}{(n^2/4)^{1/4}} = \sqrt{2} \frac{n-1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque  $\sqrt{2} \frac{n-1}{\sqrt{n}}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $|w_n|$ . En particulier,  $w_n$  ne tend pas vers 0 et la série de terme général  $w_n$  diverge grossièrement. Il se peut donc que le produit de CAUCHY de deux séries convergentes ne soit pas une série convergente (les séries de termes généraux respectifs  $u_n$  et  $v_n$  convergent en vertu du critère spécial aux séries alternées).

b. Puisque les séries de termes généraux  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  convergent, le rayon de convergence de chacune des séries entières correspondantes vaut au moins 1.

On sait que pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n)$ . Le théorème d'ABEL permet alors d'écrire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

### III. RECIPROQUE DU THEOREME D'ABEL

8. Considérons la suite  $a_n = (-1)^n$ . Pour  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, la fonction  $f$  a une limite réelle quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures, à savoir  $\frac{1}{2}$ . Pourtant, la série de terme général  $a_n$  diverge grossièrement. Ce qui précède signifie que la réciproque du théorème d'ABEL est fautive.

9. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in [0, 1[$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x)$ . Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série de terme général  $a_n$  est majorée, et puisque la suite  $(a_n)$  est positive, on déduit que la série de terme général  $a_n$  converge.

#### IV. SERIES HARMONIQUES TRANSFORMEES

10. La suite  $(\varepsilon_n \cdot 1^{n-1})$  est bornée (car  $|\varepsilon_n \cdot 1^{n-1}| = 1$ ) et donc le rayon de la série entière correspondante vaut au moins 1. Mais la série de terme général  $\varepsilon_n \cdot 1^{n-1}$  diverge grossièrement et donc le rayon vaut au plus 1. Finalement, le rayon de la série entière associée à la suite  $(\varepsilon_n)$  est égal à 1.

Puisque la suite  $(\frac{\varepsilon_n}{n})$  est dominée par la suite  $(\varepsilon_n)$ , le rayon correspondant vaut au moins 1. Mais la série de terme général  $\frac{\varepsilon_n}{n} \cdot 1^{n-1}$  n'est pas absolument convergente et donc le rayon vaut au plus 1. La deuxième série entière admet également un rayon égal à 1.

11. Si  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge, le théorème d'ABEL montre que  $f$  a une limite quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures et si  $f$  a une limite quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures, le théorème de LITTLEWOOD montre que  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge.

12. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Puisque la suite  $(\varepsilon_n)$  est  $p$ -périodique,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1} = \sum_{q=0}^{+\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_p x^{p-1}) x^{qp} \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_p x^{p-1}) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^p)^q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1 - x^p}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$g \text{ est une fraction rationnelle et } \forall x \in ]-1, 1[, g(x) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1 - x^p}.$

13. Dans le cas où  $\varepsilon_n = 1$ , on peut prendre  $p = 1$  et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $g(x) = \frac{1}{1-x}$ . Par suite,  $f(x) = -\ln(1-x)$  et  $f$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures. La question 11. montre alors que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

Dans le cas où  $\varepsilon_n = (-1)^n$ , on peut prendre  $p = 2$  et pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $g(x) = \frac{-1+x}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ . Par suite,  $f(x) = -\ln(1+x)$  et  $f(x)$  tend vers  $-\ln 2$  quand  $x$  tend vers 1. Le théorème de LITTLEWOOD montre que  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ .

14.  $g$  est continue sur  $[0, 1[$  et de signe constant au voisinage de 1 à gauche. Donc,  $f$  a une limite quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si  $g$  est intégrable sur  $[0, 1[$ . Mais alors, d'après la question 11.,  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge si et seulement si  $g$  est intégrable sur  $[0, 1[$ .

Or, quand  $x$  tend vers 1,

$$1 - x^p = (1-x)(1+x+\dots+x^{p-1}) \sim -p(x-1).$$

D'autre part, quand  $x$  tend vers 1,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_p x^{p-1} = \left( \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \right) + o(1).$$

Donc, si  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i \neq 0$ ,

$$g \sim -\frac{\sum_{i=1}^p \varepsilon_i}{p} \frac{1}{x-1}$$

et  $g$  n'est pas intégrable au voisinage de 1. Dans ce cas,  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  diverge.

Si  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i = 0$ ,  $g$  est le quotient d'un polynôme admettant 1 pour racine par d'un polynôme admettant 1 pour racine simple. Par suite, la fraction rationnelle  $g$  n'admet pas le nombre 1 pour pôle.  $g$  se prolonge donc par continuité en 1 et est donc intégrable sur  $[0, 1[$ . Dans ce cas,  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  converge.

Finalement,

$$\sum \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge si et seulement si } \sum_{i=1}^p \varepsilon_i = 0.$$

Si  $p$  est impair, on n'a jamais  $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i = 0$  (car  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ) et donc  $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$  diverge.

**15. Exemple.** Pour  $x \in [0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} = \frac{(1+x+x^2)(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)} = \frac{1+x}{1+x^3} + \frac{x^2}{1+x^3} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{x^2}{1+x^3} \\ &= \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{x^2}{1+x^3} \end{aligned}$$

Par suite,

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln(1+t^3) \right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $f(x)$  tend vers  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}$ . Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}.$$