
MATHEMATIQUES 2

I - DÉTERMINATION DE $\text{Rac}(A)$ DANS QUELQUES EXEMPLES**Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes**

1. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur \mathbb{R} à racines simples. On sait alors que A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Par suite, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soient $R \in M_n(\mathbb{R})$ puis $S = P^{-1}RP$ de sorte que $R = PSP^{-1}$. Puisque les matrices P et P^{-1} sont inversibles, les matrices P et P^{-1} sont simplifiables à gauche et à droite et on a

$$R \in \text{Rac}(A) \Leftrightarrow R^2 = A \Leftrightarrow (PSP^{-1})^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow PS^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow S^2 = D \Leftrightarrow S \in \text{Rac}(D).$$

$$\forall R \in M_n(\mathbb{R}), R \in \text{Rac}(A) \Leftrightarrow P^{-1}RP \in \text{Rac}(D).$$

2. a. Soit S une racine carrée de D .

$$SD = S \times S^2 = S^3 = S^2 \times S = DS.$$

b. Posons $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Le coefficient ligne i colonne j de la matrice SD vaut $s_{i,j}\lambda_j$ et celui de la matrice DS vaut $\lambda_i s_{i,j}$. Puisque $SD = DS$, pour tout couple (i,j) , on a $s_{i,j}\lambda_j = \lambda_i s_{i,j}$ ou encore $s_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$. Quand $i \neq j$, on a $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ et donc $s_{i,j} = 0$.

Ainsi, si S est une racine carrée de D , alors : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, ($i \neq j \Rightarrow s_{i,j} = 0$). Ceci montre que la matrice S est une matrice diagonale.

$$\forall S \in M_n(\mathbb{R}), S^2 = D \Rightarrow S \in D_n(\mathbb{R}).$$

c. L'égalité $S^2 = D$ se traduit par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i^2 = \lambda_i$.

d. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i < 0$. L'équation s_i^2 d'inconnue s_i n'a pas de solution dans \mathbb{R} et donc l'équation $S^2 = D$ n'a pas de solution dans $D_n(\mathbb{R})$ ou finalement l'équation $R^2 = A$ n'a pas de solution dans $M_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas, $\text{Rac}(A) = \emptyset$.

e. $S^2 = D \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i^2 = \lambda_i \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i = \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i}$.

Les racines carrées de D sont les matrices de la forme $S = \text{diag}(\varepsilon_i \sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ où $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$.

3. D'après ce qui précède, si $\lambda_1 < 0$ (de sorte que $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \lambda_i < 0$), $\text{Rac}(A)$ est vide.

Si $\lambda_1 \geq 0$ (de sorte que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \lambda_i \geq 0$),

les racines carrées de A sont les matrices de la forme $R = PSP^{-1}$ où $S = \text{diag}(\varepsilon_i \sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$, $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$.

Il y a au plus 2^n telles matrices.

Notons alors que si S et S' sont deux matrices diagonales, $PSP^{-1} = PS'P^{-1} \Leftrightarrow S = S'$ ce qui montre déjà que $\text{card}(\text{Rac}(A)) = \text{card}(\text{Rac}(D))$. Ensuite, pour $((\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}, (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (\{-1, 1\}^n)^2$,

$$\begin{aligned} \text{diag}(\varepsilon_i \sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n} = \text{diag}(\varepsilon'_i \sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n} &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i} = \varepsilon'_i \sqrt{\lambda_i} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_i}(\varepsilon_i - \varepsilon'_i) = 0 \text{ et } \forall i \geq 2, \varepsilon_i = \varepsilon'_i \text{ (car } \forall i \geq 2, \sqrt{\lambda_i} \neq 0). \end{aligned}$$

Si $\lambda_1 > 0$, l'égalité $\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) = 0$ est équivalente à $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$. Dans ce cas, $S = S' \Leftrightarrow (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} = (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq n}$. Dans ce cas, il y a 2^n matrices deux à deux distinctes de la forme $\text{diag}(\varepsilon_i \sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ et donc 2^n racines carrées deux à deux distinctes de A dans $M_n(\mathbb{R})$.

Si $\lambda_1 = 0$, les racines carrées de D sont les matrices de la forme $\text{diag}(0, \varepsilon_2 \sqrt{\lambda_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n})$, $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq n}$. Deux telles matrices S et S' sont égales si et seulement si $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq n} = (\varepsilon'_i)_{2 \leq i \leq n}$. Dans ce cas, il y a 2^{n-1} telles matrices deux à deux distinctes et donc 2^{n-1} racines carrées deux à deux distinctes de A dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Si $\lambda_1 < 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 0$.
- Si $\lambda_1 = 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 2^{n-1}$.
- Si $\lambda_1 > 0$, $\text{card}(\text{Rac}(A)) = 2^n$.

4. Déterminons le polynôme caractéristique de A .

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 11 - X & -5 & 5 \\ -5 & 3 - X & -3 \\ 5 & -3 & 3 - X \end{vmatrix} \\ &= (11 - X) \begin{vmatrix} 3 - X & -3 \\ -3 & 3 - X \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 - X \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 3 - X & -3 \end{vmatrix} \\ &= (11 - X)(X^2 - 6X) + 5(5X) + 5(5X) = X[(11 - X)(X - 6) + 50] = X(-X^2 + 17X - 16) \\ &= -X(X - 1)(X - 16) \end{aligned}$$

$$\chi_A = -X(X - 1)(X - 16).$$

La matrice A admet 3 valeurs propres réelles deux à deux distinctes à savoir 0, 1 et 16. D'après la question précédente, A admet exactement 4 racines carrées à savoir les matrices de la forme $P \text{diag}(0, \pm 1, \pm 4) P^{-1}$ où P est une matrice carrée inversible telle que $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale.

Déterminons une matrice P . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = \frac{11x}{5} \\ y - z = \frac{5x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = \frac{11x}{5} \\ \frac{11x}{5} = \frac{5x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{Ker}(A)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A - I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + y \\ -5x + 2y - 3(-2x + y) = 0 \\ 5x - 3y + 2(-2x + y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{Ker}(A - I_3)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matrice A est symétrique réelle et on sait en particulier que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux. Ainsi, $\text{Ker}(A - 16I_3)$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_3)$ où

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Une matrice P convenable est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$

5. a.

$$R^2 = 0_n \Rightarrow f \circ f = 0 \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) \Rightarrow r \leq n - r \Rightarrow r \leq \frac{n}{2}.$$

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \text{ et } r \leq \frac{n}{2}.$$

b. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}, \mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_r u_r = 0 &\Rightarrow f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_r u_r) = 0 \\ &\Rightarrow \mu_1 e_1 + \dots + \mu_r e_r = 0 \\ &\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_r = 0 \text{ (car la famille } (e_1, \dots, e_r) \text{ est libre).} \end{aligned}$$

Il reste $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$ ce qui impose $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ car la famille (e_1, \dots, e_{n-r}) est libre.

Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est libre. De plus $\text{card}(e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r) = n = \dim(\mathbb{R}^n) < +\infty$ et donc

la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base de \mathbb{R}^n .

On a alors immédiatement

$$M_r = \begin{pmatrix} 0_{r, n-r} & I_r \\ 0_{n-r, n-r} & 0_{n-r, r} \end{pmatrix},$$

où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

6. a. Réciproquement, pour $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$, $f(f(e_i)) = f(0) = 0$ et pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ $f(f(u_i)) = f(e_i) = 0$. Ainsi l'endomorphisme f^2 s'annule sur une base de \mathbb{R}^n et donc $f^2 = 0$ ou encore $M_r^2 = 0$.

Ainsi, A est une racine carrée de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est une matrice M_r ou encore

A est une racine carrée de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{r, n-r} & I_r \\ 0_{n-r, n-r} & 0_{n-r, r} \end{pmatrix}$, $0 \leq r \leq \frac{n}{2}$.

b. Les racines carrées de la matrice nulle dans $M_4(\mathbb{R})$ sont 0 et les matrices semblables à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3 : Cas où $A = I_n$

7. a. Puisque $R^2 = I_n$, on a $1 = \det(I_n) = \det(R^2) = (\det(R))^2$ et en particulier, $\det(R) \neq 0$. Ceci montre que R est inversible.

b. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice R dans la base canonique de \mathbb{R}^n . On sait que

$$R^2 = I_n \Leftrightarrow f^2 = \text{Id}$$

$\Leftrightarrow f$ est une symétrie

\Leftrightarrow il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de f est de la forme $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$

$\Leftrightarrow R$ est semblable à une matrice de la forme $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

8. $\text{Rac}(I_n)$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{R} dont le spectre est contenu dans $\{-1, 1\}$.

Exemple 4 : Cas où A est une matrice symétrique réelle

9. La matrice $\text{diag}(-n, -(n-1), \dots, -1)$ est symétrique réelle et n'admet pas de racine carrée dans $M_n(\mathbb{R})$ d'après 2.d. Donc, une matrice symétrique réelle n'admet pas nécessairement de racine carrée dans $M(\mathbb{R})$.

10. Soit A une matrice symétrique réelle positive. Puisque A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Montrons alors que les valeurs propres de A , c'est-à-dire les λ_i , sont des réels positifs.

Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis X un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

$${}^tXAX = {}^tX(AX) = {}^tX(\lambda_i X) = \lambda_i {}^tXX = \lambda_i \|X\|^2,$$

où $\|X\|$ désigne la norme euclidienne usuelle du vecteur colonne X . Par hypothèse, ${}^tXAX \geq 0$ ou encore $\lambda_i \|X\|^2 \geq 0$ (*). Mais X est un vecteur propre et est en particulier non nul. On en déduit que $\|X\|^2 > 0$ et l'inégalité (*) fournit $\lambda_i \geq 0$.

Soit alors $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ puis $R = PD'P^{-1} = PD'^tP$ (puisque P est orthogonale).

- $R^2 = (PD'P^{-1})^2 = PD'^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$ et donc R est une racine carrée de A dans $M_n(\mathbb{R})$.
- R est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle et donc R est une matrice symétrique réelle.
- Vérifions enfin que la matrice R est positive. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = P^{-1}X = {}^tPX$. Posons $X' = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$${}^tXRX = {}^tXPD'{}^tPX = {}^t({}^tPX)D'({}^tPX) = {}^tX'D'X' = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} x_i'^2 \geq 0.$$

$R = PD'^tP$ est donc une matrice symétrique positive telle que $R^2 = A$.

II - ETUDE TOPOLOGIQUE DE $\text{Rac}(A)$

11. La fonction $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow (M_n(\mathbb{R}))^2$ est linéaire et $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. f est donc continue sur $M_n(\mathbb{R})$. La fonction $g : (M_n(\mathbb{R}))^2 \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est bilinéaire et $(M_n(\mathbb{R}))^2$ est de dimension finie. g est donc continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$. Mais alors, la fonction $g \circ f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Posons $h = g \circ f$.

Le singleton $\{A\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$. Par suite, $\text{Rac}(A) = h^{-1}(\{A\})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\text{Rac}(A)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

12. a. Soit $q \in \mathbb{N}$.

$$S_q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, $\forall q \in \mathbb{N}$, $S_q \in \text{Rac}(I_2)$. Mais, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $N(S_q) = q$. Par suite, $\{N(R), R \in \text{Rac}(I_2)\}$ n'est pas majoré ou encore

$\text{Rac}(I_2)$ n'est pas une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$.

b. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. La matrice $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\text{Rac}(I_n)$ et vérifie $N(S_q) = q$. Donc

$\text{Rac}(I_n)$ n'est pas une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$.

c. Supposons qu'il existe une norme surmultiplicative $\| \cdot \|$ sur $GL_n(\mathbb{R})$. Pour $R \in \text{Rac}(I_n)$, on a en particulier $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\|R\| \times \|R\| \leq \|R \times R\| = \|I_n\|$. Ainsi

$$\forall R \in \text{Rac}(I_n), \|R\| \leq \sqrt{\|I_n\|}.$$

On en déduit que $\text{Rac}(I_n)$ est une partie bornée de $GL_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|$. Mais $M_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace de dimension finie. On en déduit que la norme N est équivalente à la norme $\| \cdot \|$ et donc que $\text{Rac}(I_n)$ est aussi une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme N (il existe un réel K tel que $N \leq K\| \cdot \|$ et donc, $\forall R \in \text{Rac}(I_n), N(R) \leq K\sqrt{\|I_n\|}$). Ceci n'est pas et donc

il n'existe pas de norme surmultiplicative sur $GL_n(\mathbb{R})$.

I II - ZÉROS DE FONCTIONS POLYNOMIALES. APPLICATION À LA DÉTERMINATION DE L'INTÉRIEUR DE $\text{RAC}(A)$

13. a. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

$x \in B_\infty(a, r) \Leftrightarrow \|x - a\|_\infty < r \Leftrightarrow \text{Max}\{|x_i - a_i|, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\} < r \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x - a_i| < r \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_i - r < x_i < a_i + r$.

Par suite,

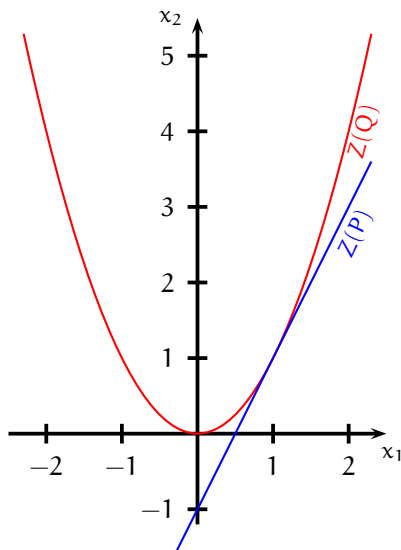
$$B_\infty(a, r) = \prod_{k=1}^p]a_k - r, a_k + r[.$$

b. Soient F et G deux parties de \mathbb{R}^p d'intérieur vide. Puisque $F \cap G \subset F$, on a $(F \overset{\circ}{\cap} G) \subset \overset{\circ}{F} = \emptyset$ et donc $(F \overset{\circ}{\cap} G) = \emptyset$.

14. a. Le polynôme nul a une infinité de racines et un polynôme non nul (d'une variable) a un nombre fini de racines. Donc

$$\forall P \in \Gamma_1, (Z(P) \text{ est infini} \Leftrightarrow P = 0).$$

b. $Z(P)$ est la droite d'équation $x_2 = 2x_1 - 1$ et $Z(Q)$ est la parabole d'équation $x_2 = x_1^2$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont infinis.



15. a. Démontrons le résultat par récurrence sur p .

• Si $p = 1$, on sait qu'un polynôme d'une variable qui s'annule sur une partie infinie I_1 de \mathbb{R} est nécessairement le polynôme nul.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'un polynôme $P \in \Gamma_p$ qui s'annule sur une partie de \mathbb{R}^p de la forme $I_1 \times \dots \times I_p$ où I_1, \dots, I_p sont des parties infinies de \mathbb{R} soit nécessairement le polynôme nul.

Soit alors I_1, \dots, I_p, I_{p+1} , $p+1$ parties infinies de \mathbb{R} puis soit $P \in \Gamma_{p+1}$ un polynôme qui s'annule sur $I_1 \times \dots \times I_p \times I_{p+1}$. Le polynôme P peut se décrire sous la forme :

$$\forall (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}, P = x_{p+1}^q \lambda_q(x_1, \dots, x_p) + x_{p+1}^{q-1} \lambda_{q-1}(x_1, \dots, x_p) + \dots + x_{p+1} \lambda_1(x_1, \dots, x_p) + \lambda_0(x_1, \dots, x_p),$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ sont des éléments de Γ_p .

Soit (x_1, \dots, x_p) un élément **fixé** de $I_1 \times \dots \times I_p$. Le polynôme d'une variable $x_{p+1} \mapsto P(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$ s'annule sur I_{p+1} qui est une partie infinie de \mathbb{R} . On en déduit que ces coefficients à savoir $\lambda_q(x_1, \dots, x_p), \dots, \lambda_1(x_1, \dots, x_p), \lambda_0(x_1, \dots, x_p)$ sont nuls.

Ainsi, $\forall (x_1, \dots, x_p) \in I_1 \times \dots \times I_p$, $\lambda_0(x_1, \dots, x_p) = \lambda_1(x_1, \dots, x_p) = \dots = \lambda_q(x_1, \dots, x_p) = 0$. $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ sont donc $q+1$ polynômes éléments de Γ_p qui s'annulent sur $I_1 \times \dots \times I_p$ où I_1, \dots, I_p sont des parties infinies de \mathbb{R} . L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que les polynômes $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ sont nuls et donc que P est le polynôme nul.

Le résultat est démontré par récurrence.

b. Soit P un élément de Γ_p s'annulant sur une partie A de \mathbb{R}^p d'intérieur non vide. A contient une boule $B_\infty(\mathbf{a}, r)$, $r > 0$. D'après la question 13.a., cette boule est de la forme $I_1 \times \dots \times I_p$ où I_1, \dots, I_p sont des parties infinies de \mathbb{R} . La question précédente montre alors que P est nul.

c. Par contraposition, on a

$$\forall P \in \Gamma_p, (P \neq 0 \Rightarrow (Z(P))^\circ = \emptyset).$$

16. a. Posons $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$R^2 = A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n r_{i,k} r_{k,j} - a_{i,j} = 0.$$

Pour $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons

$$\forall (x_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}, P_{i,j}((x_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n}) = \sum_{k=1}^n x_{i,k} x_{k,j} - a_{i,j}.$$

On a alors :

$$\forall R \in M_n(\mathbb{R}), R \in \text{Rac}(A) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_{i,j}(R) = 0 \Leftrightarrow R \in \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(P_{i,j}).$$

b. Aucun des polynômes $P_{i,j}$ n'est nul et donc, d'après la question 15.c., chaque $Z(P_{i,j})$ est d'intérieur vide. La question 13.b. permet alors d'affirmer que $\bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(P_{i,j})$ et donc $\text{Rac}(A)$ est d'intérieur vide.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), (\text{Rac}(A))^\circ = \emptyset.$$