SESSION 2005

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I

I.1 a) En développant $\det M$ suivant sa deuxième colonne, on obtient

$$\det M = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = 2.$$

b)

$$M \times {}^t\mathrm{Com}M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -6 & -2 & -3 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

c) Toujours en développant suivant la deuxième colonne, on obtient

$$\chi_M = \begin{vmatrix} 5-X & 0 & 3 \\ -6 & -1-X & -3 \\ -6 & 0 & -4-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} 5-X & 3 \\ -6 & -4-X \end{vmatrix} = (-1-X)(X^2-X-2) = (1+X)^2(2-X).$$

d)

$$(I_3+M)(2I_3-M) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\chi_M(M) = (I_3+M)^2(2I_3-M) = (I_3+M)(I_3+M)(2I_3-M) = (I_3+M)\times 0 = 0_3.$$

I.2 a) En développant $\det B$ suivant sa j^ecolonne, on obtient $\det B = \sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{k,j}$.

b) En développant $\det A$ suivant sa j^ecolonne, $j \in [\![1,n]\!]$ donné, on obtient

$$\det A = \det B = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}A_{k,j},$$

ce qui démontre le résultat de l'énoncé dans le cas particulier $l = j$.

Sinon, on se donne deux entiers l et j distincts et éléments de $[\![1,n]\!]$ et on applique le résultat de la question précédente au cas particulier $(\beta_1,\dots,\beta_n) = (a_{1,l},\dots,a_{n,l})$, ou encore on remplace la j^ecolonne de la matrice A par sa l^ecolonne. La matrice B ainsi obtenue a deux colonnes égales, ses l^eet j^ecolonnes. Le déterminant de B est donc nul ce qui fournit

$$\sum_{k=1}^{n} a_{l,j}A_{k,j} = \det B = 0.$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall (l,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} a_{l,j}A_{k,j} = (\det A)\delta_{l,j}.}$$

c) Si on développe $\det A$ suivant sa i^{e}ligne, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{i,k} = \det A.$$

Si on remplace la i^{e}ligne de A par sa l^{e}, $l \neq i$, la nouvelle matrice a un déterminant nul car a deux lignes identiques. En développant ce déterminant suivant sa i^{e}ligne, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} a_{l,k}A_{i,k} = 0.$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall (i,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} a_{l,k}A_{i,k} = (\det A)\delta_{i,l}.}$$

d) Le coefficient ligne l, colonne i de la matrice $A \times {}^t\text{Com}A$ vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{l,k}A_{i,k}$ et le coefficient ligne l, colonne i de la matrice $(\det A)I_n$ vaut $(\det A)\delta_{l,i}$. D'après la question c), ces coefficients sont égaux et donc

$$A \times {}^t\text{Com}A = (\det A)I_n.$$

Le coefficient ligne j, colonne l de la matrice ${}^t\text{Com}A \times A$ vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{k,l}A_{k,j}$ et le coefficient ligne j, colonne l de la matrice $(\det A)I_n$ vaut $(\det A)\delta_{l,j}$. D'après la question b), ces coefficients sont égaux et donc

$${}^t\text{Com}A \times A = (\det A)I_n.$$

Finalement,

$$\boxed{A \times {}^t\text{Com}A = {}^t\text{Com}A \times A = (\det A)I_n.}$$

I.3 a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det G$ est un polynôme de degré au plus n.

- Pour $n = 1$, $\det G = G_{1,1}$ est bien un polynôme de degré au plus 1.
- Soit $n \geq 1$, supposons que pour toute matrice G de format n, $\det G$ soit un polynôme de degré au plus n.

Soit G de format $n+1$. On note $A_{i,j}$ le cofacteur du coefficient $G_{i,j}$ dans la matrice G. Par hypothèse de récurrence, chaque $A_{i,j}$ est une fonction polynomiale de degré au plus n. En développant $\det G$ suivant sa première colonne, on obtient

$$\det G = \sum_{k=1}^{n+1} G_{k,1}A_{k,1}.$$

Mais alors, $\det G$ est une combinaison linéaire de produits de polynômes de degré au plus 1 et de polynômes de degré au plus n. $\det G$ est donc un polynôme de degré au plus $n+1$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \det G \text{ est un polynome de degré au plus } n.}$$

b) Pour $k \in [\![0,p]\!]$, posons $D_k = (d_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tout complexe x, on a

$$\sum_{k=0}^{p} x^k D_k = (P_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n} \text{ où } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P_{i,j} = \sum_{k=0}^{p} d_{i,j}^{(k)} X^k.$$

Si pour tout complexe x, on a $\sum_{k=0}^{p} x^k D_k = 0$, alors chaque polynôme $P_{i,j}$ est le polynôme nul et donc tous les coefficients de chaque polynome $P_{i,j}$ sont nuls. Mais alors chaque matrice D_k est nulle.

I.4 a) $A - xI_n$ est une matrice de format n dont les coefficients sont des polynomes de degré au plus 1. Les cofacteurs des coefficients de cette matrice sont des déterminants de format $n-1$ dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus 1. D'après la question 3.a), chacun de ces cofacteurs est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$. On peut donc écrire le coefficient ligne i colonne j de la matrice ${}^t\text{com}(A - xI_n)$ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{i,j}^{(k)} x^k.$$

Mais alors

$$C(x) = {}^t\text{com}(A - xI_n) = (\sum_{k=0}^{n-1} b_{i,j}^{(k)} x^k)_{1\leq i,j\leq n} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k (b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k,$$

où $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ B_k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$.

b) D'après la question I.2.d), on sait que $(A - xI_n) \times C(x) = \det(A - xI_n)I_n$, ce qui s'écrit encore

$$(A - xI_n)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k) = \chi_A(x)I_n = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k)I_n\ (*).$$

Mais

$$(A - xI_n)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k AB_k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k AB_k - \sum_{k=1}^{n} x^k B_{k-1} = AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (AB_k - B_{k-1}) - x^n B_{n-1},$$

et l'égalité $(*)$ s'écrit finalement

$$\forall x \in \mathbb{C},\ (AB_0 - \alpha_0 I_n) + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (AB_k - B_{k-1} - \alpha_k I_n) + x^n(-B_{n-1} + \alpha_n I_n) = 0.$$

Le résultat de la question I.3.b) permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\begin{array}{ll} AB_0 & = \alpha_0 I_n \\ AB_k - B_{k-1} & = \alpha_k I_n\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ \quad -B_{n-1} & = \alpha_n I_n. \end{array}}$$

c)

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = \alpha_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k A^k + \alpha_n A^n = \alpha_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} A^k(\alpha_k I_n) + A^n(\alpha_n I_n) \\ &= AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A^k(AB_k - B_{k-1}) - A^n B_{n-1} = AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1}B_k - A^k B_{k-1}) - A^n B_{n-1} \\ &= AB_0 + (A^n B_{n-1} - AB_0) - A^n B_{n-1} \text{ (somme télescopique)} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_A(A) = 0_n \text{ (théorème de Cayley-Hamilton).}}$$

PARTIE II

II.1 a) A commute avec C_1.
Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$.

$$A(A - \lambda_j I_n) = (A^2 - \lambda_j A) = (A - \lambda_j I_n)A.$$

A commute avec chaque $A-\lambda_j I_n$, $1\leq j\leq n-1$ et donc avec chaque C_k, $2\leq k\leq n$.

b) $(A-\lambda_n)C_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(A-\lambda_j I_n)=(-1)^n\chi_A(A)=0_n$ d'après la question I.4.c)

II.2 a) Par définition de Y, $\forall s\in\mathbb{R}$, $y_1'(s)=\lambda_1 y_1(s)$ et pour $k\in[\![2,n]\!]$, on a $y_k'(s)=y_{k-1}(s)+\lambda_k y_k(s)$. Par suite, pour tout réel s

$$\begin{aligned}
E_A'(s)&=\sum_{k=1}^{n}y_k'(s)C_k=\lambda_1y_1(s)C_1+\sum_{k=2}^{n}(y_{k-1}(s)+\lambda_ky_k(s))C_k=\lambda_1y_1(s)C_1+\sum_{k=2}^{n}y_{k-1}(s)C_k+\sum_{k=2}^{n}\lambda_ky_k(s)C_k\\
&=\sum_{k=2}^{n}y_{k-1}(s)C_k+\sum_{k=1}^{n}\lambda_ky_k(s)C_k=\sum_{k=1}^{n-1}y_k(s)C_{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_ky_k(s)C_k\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}y_k(s)(\lambda_kC_k+C_{k+1})+\lambda_ny_n(s)C_n.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $C_{k+1}=(A-\lambda_kI_n)C_k$. D'autre part, d'après la question II.1.b), $(A-\lambda_nI_n)C_n=0$ ce qui fournit $\lambda_nC_n=AC_n$. Pour tout réel s on a alors

$$E_A'(s)=\sum_{k=1}^{n-1}y_k(s)(\lambda_kC_k+(A-\lambda_kI_n)C_k)+y_n(s)AC_n=\sum_{k=1}^{n}y_k(s)\lambda_kAC_k=AE_A(s).$$

Enfin,

$$E_A(0)=\sum_{k=1}^{n}y_k(0)C_k=\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,1}C_k=C_1=I_n.$$

$$\boxed{E_A \text{ est solution du problème } \mathbf{(1)}.}$$

b) D'après la question II.1a), la matrice A commute avec toutes les matrices C_k et donc pour tout réel s, on a aussi

$$E_A'(s)=\sum_{k=1}^{n}y_k(s)\lambda_kAC_k\sum_{k=1}^{n}y_k(s)\lambda_kC_kA=E_A(s)A.$$

$$\boxed{E_A \text{ est solution du problème } \mathbf{(2)}.}$$

c) Pour s réel, on a $E_A'(s)=AE_A(s)$ d'après a) et $E_A'(s)=E_A(s)A$ d'après b). Donc pour tout réel s,

$$\varphi'(s)=E_A'(s)E_A(-s)-E_A(s)E_A'(-s)=E_A(s)AE_A(-s)-E_A(s)AE_A(-s)=0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel s

$$\varphi(s)=\varphi(0)=E_A(0)\times E_A(0)=I_n^2=I_n.$$

Mais alors

$$\boxed{\forall s\in\mathbb{R},\ E_A(s)\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (E_A(s))^{-1}=E_A(-s).}$$

d) Pour tout réel s, on a

$$\psi'(s)=-E_A'(-s)F(s)+E_A(-s)F'(s)=-AE_A(-s)F(s)+E_A(-s)AF(s)=-AE_A(-s)F(s)+AE_A(-s)F(s)=0_n.$$

Par suite, la fonction ψ est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel s, on a $E_A(-s)F(s)=e_A(0)F(0)=I_n$ et donc

$$F(s)=(E_A(-s))^{-1}=E_A(s) \text{ (d'après c)).}$$

$$\boxed{E_A \text{ est l'unique solution du problème } \mathbf{1)}.}$$

e) Soit F une solution du problème **2)**. Comme en d) la fonction $s \mapsto F(s)E_A(-s)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel s, $F(s)E_A(-s) = I_n$. On en déduit de même $F = E_A$ et donc

$$\boxed{E_A \text{ est l'unique solution du problème } \mathbf{2)}.}$$

II.3 On a $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et d'après la question 1.1, $\chi_M = (1+X)^2(2-X)$. On pose $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. On a alors $C_1 = I_3$ puis $C_2 = M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ puis $C_2 = (M-2I_3)(M+I_3) = 0_3$ (d'après la question I.1.d)).
Il reste à déterminer la fonction Y. On note que la connaissance de y_3 est superflue puisque $C_3 = 0$. L'égalité $Y' = HY$ fournit déjà $y_1' = 2y_1$ et $y_1(0) = 1$ et donc $\forall s \in \mathbb{R}$, $y_1(s) = e^{2s}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} y_2' = y_1 - y_2 \text{ et } y_2(0) = 0 &\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R},\ y_2'(s) + y_2(s) = e^{2s} \text{ et } y_2(0) = 0 \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R},\ y_2'(s)e^s + y_2(s)e^s = e^{3s} \text{ et } y_2(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R},\ (y_2e^s)'(s) = e^{3s} \text{ et } y_2(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R},\ y_2(s)e^s - y_2(0)e^0 = \frac{1}{3}(e^{3s} - e^0) \text{ et } y_2(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R},\ y_2(s) = \frac{1}{3}(e^{2s} - e^{-s}) \end{aligned}$$

Mais alors pour tout réel s

$$e^{sM} = y_1(s)C_1 + y_2(s)C_2 = e^{2s}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(e^{2s} - e^{-s})\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2s} - e^{-s} & 0 & e^{2s} - e^{-s} \\ -2e^{2s} + 2e^{-s} & e^s & -e^{2s} + e^{-s} \\ -2e^{2s} + 2e^{-s} & 0 & -e^{2s} + 2e^{-s} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sM} = \begin{pmatrix} 2e^{2s} - e^{-s} & 0 & e^{2s} - e^{-s} \\ -2e^{2s} + 2e^{-s} & e^s & -e^{2s} + e^{-s} \\ -2e^{2s} + 2e^{-s} & 0 & -e^{2s} + 2e^{-s} \end{pmatrix}.}$$

II.4 Par définition, $e^{0A} = E_A(0) = I_n$ et donc $Z(0) = I_nZ_0 = Z_0$. D'autre part, pour tout réel s,

$$Z'(s) = E_A'(s)Z_0 = AE_A(s)Z_0 = AZ(s).$$

Z est donc la solution au problème de l'énoncé (on sait que cette solution est unique).

PARTIE III

III.1 Soit s un réel. D'après II, $e^{sA} = y_1(s)I_n + \sum_{k=2}^{n} y_k(s)\prod_{j=1}^{k-1}(A - \lambda_jI_n)$. Par suite

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sA} \text{ est un polynôme en } A.}$$

III.2 a) Soit s un réel. A commute avec B et donc avec tout polynôme en B. En particulier, d'après la question précédente, A et e^{sB} commutent.

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ A \text{ et } e^{sB} \text{ commutent.}}$$

b) Mais alors e^{sB} commute avec tout polynôme en A et en particulier avec e^{sA}.

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sA} \text{ et } e^{sB} \text{ commutent.}}$$

c) Pour tout réel s, puisque les matrices ci-dessous commutent d'après la question précédente, on a

$$\nu'(s) = Ae^{sA}e^{sB} + e^{sA}Be^{sB} = Ae^{sA}e^{sB} + Be^{sA}e^{sB} = (A+B)e^{sA}e^{sB} = (A+B)\nu(s).$$

D'autre part, $\nu(0) = e^{0A}e^{0B} = I_n^2 = I_n$. Ainsi la fonction ν est solution du problème de CAUCHY : $E' = (A+B)E$ et $E(0) = I_n$. On sait d'après la partie III que ce problème admet une et une seule solution à savoir la fonction μ. Donc $\mu = \nu$ et en particulier $\mu(1) = \nu(1)$ ce qui fournit $e^{A+B} =^A \times e^B$. On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ (AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \times e^B).}$$

III.3 • Déterminons e^A.
On a $\chi_A = X(X-1)$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\}$. On pose $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. On en déduit $C_1 = I_2$ et $C_2 = A$.
Ensuite $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $y_1' = 0$ et $y_1(0) = 1$ et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ y_1(s) = 1$. On a ensuite $y_2' = 1 + y_2$ et $y_2(0) = 0$. L'équation $y_2' = 1 + y_2$ admet pour solution particulière la fonction $s \mapsto -1$ et donc pour solution générale les fonctions $s \mapsto -1 + \lambda e^s$. L'égalité $y_2(0) = 0$ fournit $\lambda = 1$ et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ y_2(s) = e^s - 1$. Par suite,

$$e^A = y_1(1)C_1 + y_2(1)C_2 = I_2 + (e-1)A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Déterminons e^B.
On a $\chi_B = X(X-1)$ et donc $\mathrm{Sp}(B) = \{0,1\}$. On pose $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. On en déduit $C_1 = I_2$ et $C_2 = B$. La matrice H est inchangée et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ y_1(s) = 1$ et $\forall s \in \mathbb{R},\ y_2(s) = e^s - 1$. Par suite,

$$e^B = y_1(1)C_1 + y_2(1)C_2 = I_2 + (e-1)B = \begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{A+B} = X(X-2)$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0,2\}$. On pose $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$. On en déduit $C_1 = I_2$ et $C_2 = A + B$.
Ensuite $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a toujours $\forall s \in \mathbb{R},\ y_1(s) = 1$. On a ensuite $y_2' = 1 + 2y_2$ et $y_2(0) = 0$. L'équation $y_2' = 1 + y_2$ admet pour solution particulière la fonction $s \mapsto -\dfrac{1}{2}$ et donc pour solution générale les fonctions $s \mapsto -\dfrac{1}{2} + \lambda e^{2s}$. L'égalité $y_2(0) = 0$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ y_2(s) = \dfrac{1}{2}(e^{2s} - 1)$. Par suite,

$$e^{A+B} = y_1(1)C_1 + y_2(1)C_2 = I_2 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)(A+B) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Enfin $e^A \times e^B = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & -e^2 + 2e - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} e^A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e^B = \begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e^A \times e^B = \begin{pmatrix} e^2 & -e^2+2e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ \text{En particulier, } e^{A+B} \neq e^A \times e^B. \end{array}}$$

III.4 a) Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\mu(s) = P \times e^{sP^{-1}AP} \times P^{-1}$. On a $\mu(0) = e^{0_n} = I_n$ et pour tout réel s

$$\mu'(s) = P \times P^{-1}AP \times e^{sP^{-1}AP} \times P^{-1} = A \times (P \times e^{sP^{-1}AP} \times P^{-1}) = A\mu(s).$$

Ainsi la fonction μ est solution du problème de CAUCHY : $E' = AE$ et $E(0) = I_n$. On sait que ce problème admet une et une seule solution à savoir la fonction $s \mapsto e^{sA}$ et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ P \times e^{sP^{-1}AP} \times P^{-1} = e^{sA}$ ou encore

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sP^{-1}AP} = P^{-1}e^{sA}P.}$$

b) Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\mu(s) = {}^t(e^{s\,{}^tA})$. On a $\mu(0) = {}^t(e^{0_n}) = I_n$ et pour tout réel s

$$\mu'(s) = {}^t({}^tAe^{s\,{}^tA}) = {}^t(e^{s\,{}^tA})A = \mu(s)A.$$

Ainsi la fonction μ est solution du problème de Cauchy : $E' = EA$ et $E(0) = I_n$. On sait que ce problème admet une et une seule solution à savoir la fonction $s \mapsto e^{sA}$ et donc $\forall s \in \mathbb{R},\ {}^t(e^{s\,{}^tA}) = e^{sA}$ ou encore

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{s\,{}^tA} = {}^t(e^{sA}).}$$

PARTIE IV

IV.1 Notons $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ ou encore posons $X = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix}$.

$$u \wedge x = (ae_1 + be_2 + ce_3) \wedge (x^{(1)}e_1 + x^{(2)}e_2 + x^{(3)}e_3) = (bx^{(3)} - cx^{(2)})e_1 + (cx^{(1)} - ax^{(3)})e_2 + (ax^{(2)} - bx^{(1)})e_3.$$

La matrice de $u \wedge x$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{pmatrix} bx^{(3)} - cx^{(2)} \\ cx^{(1)} - ax^{(3)} \\ ax^{(2)} - bx^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Le problème } \mathbf{(3)} \text{ s'écrit matriciellement : } \forall s \in \mathbb{R},\ \frac{dX}{ds} = AX \text{ et } X(0) = X_0 \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.}$$

IV.2

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -c & b \\ a & -\lambda \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -c & b \\ -\lambda & -a \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda^2 + a^2) - c(\lambda c - ab) - b(ac + \lambda b) = -\lambda^3 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) \\
&= -\lambda^3 - \lambda \text{ (car } u \text{ est unitaire).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda = -\lambda(\lambda - i)(\lambda + i).}$$

L'égalité $\chi_A(A) = 0$ fournit alors

$$\boxed{A^3 = -A.}$$

IV.3 Pour s réel posons $F(s) = I_3 + (\sin s)A + (1 - \cos s)A^2$. On a déjà $F(0) = I_3$ et d'autre part, pour tout réel s,

$$AF(s) = A + (\sin s)A^2 + (1 - \cos s)A^3 = A + (\sin s)A^2 - (1 - \cos s)A = (\cos s)A + (\sin s)A^2 = F'(s).$$

Ainsi, la fonction F est solution du problème de Cauchy : $E' = AE$ et $E(0) = I_3$. On en déduit que E est la fonction $s \mapsto e^{sA}$.

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sA} = I_3 + (\sin s)A + (1 - \cos s)A^2.}$$

D'après la question II.4., on sait que la solution du problème **(4)** est la fonction X définie par

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ X(s) = (I_3 + (\sin s)A + (1 - \cos s)A^2)X_0.}$$

IV.4 a) Soit v un vecteur unitaire orthogonal à u puis $w = u \wedge v$. La famille $\mathcal{B}_0 = (u, v, w)$ est une base orthonormale (directe) de $\mathbb{R}^3$. De plus, $f(u) = u \wedge u = 0$, $f(v) = u \wedge v = w$ et $f(w) = u \wedge w = -v$. $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f a la forme voulue.
b) Notons U, V et W les vecteurs colonnes représentant les vecteurs u, v et w dans la base $\mathcal{B}$. On a alors $AU = 0$, $AV = W$ et $AW = -V$ puis pour s réel

- $e^{sA}U = (I_3 + (\sin s)A + (1-\cos s)A^2)U = U$,
- $e^{sA}V = (I_3 + (\sin s)A + (1-\cos s)A^2)V = V + (\sin s)W - (1-\cos s)V = (\cos s)V + (\sin s)W$,
- $e^{sA}W = (I_3 + (\sin s)A + (1-\cos s)A^2)W = W - (\sin s)V - (1-\cos s)W = (-\sin s)V + (\cos s)W$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall s \in \mathbb{R},\ g(u) = u,\ g(v) = (\cos s)v + (\sin s)w \text{ et } g(w) = (-\sin s)v + (\cos s)w.\\ \forall s \in \mathbb{R},\ g \text{ est la rotation d'angle } s \text{ autour du vecteur } u.\end{array}}$$

c) D'après la question III.4.a), si on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_0$, on a $B = P^{-1}AP$ et donc

$$e^{sB} = e^{sP^{-1}AP} = P^{-1}e^{sA}P = P^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}g)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

(On pouvait aussi appliquer IV.3 au cas particulier $a = 1$, $b = c = 0$)

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ e^{sB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}.}$$

