SESSION 2005

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $\lambda' = -\lambda - 1$. Alors $\lambda'(\lambda' + 1) = (-\lambda - 1)(-\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$. Les équations $(\mathscr{E}_\lambda)$ et $(\mathscr{E}_{-\lambda-1})$ sont donc les mêmes.

I.2 On note R_a le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ et on suppose à priori que $R_a > 0$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$, on a alors

$$
\begin{aligned}
x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) &= (x^2+x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1))a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1)+n)a_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n - \lambda^2 - \lambda)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-\lambda)(n+\lambda+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda+1)a_n]x^n
\end{aligned}
$$

Par suite, sous l'hypothèse $R_a > 0$,

$$
\begin{aligned}
y \text{ solution de } (\mathscr{E}_\lambda) \text{ sur }]-R_a, R_a[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R_a, R_a[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda+1)a_n]x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)^2 a_{n+1} - (\lambda-n)(n+\lambda-1)a_n \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda-n)(n+\lambda+1)}{(n+1)^2} a_n.
\end{aligned}
$$

I.3 I.3.1 Soient $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $d \in \mathbb{N}$. L'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$ admet une solution polynomiale de degré d si et seulement si il est possible de choisir a_0 tel que $a_d \neq 0$ et $\forall n \geq d+1,\ a_n = 0$. Comme $a_{d+1} = \dfrac{(\lambda-d)(d+\lambda+1)}{(d+1)^2} a_d$, ceci impose $(\lambda-d)(d+\lambda+1) = 0$ puis $\lambda = d$ ou $\lambda = -1-d$ et finalement $\lambda = d$ (car $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}$ et $-1-d \leq -1$).

Réciproquement, si $\lambda = d$, soit a la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{(d-n)(n+d+1)}{(n+1)^2} a_n$. Pour $n < d$, on a $\dfrac{(d-n)(n+d+1)}{(n+1)^2} \neq 0$ et donc par récurrence, $a_n \neq 0$ pour $n \leq d$. En particulier, $a_d \neq 0$. Puis $a_{d+1} = \dfrac{(d-d)(d+d+1)}{(d+1)^2} a_d = 0$ et donc par récurrence $\forall n \geq d+1,\ a_n = 0$. La fonction y associée est donc un polynôme de degré d. Enfin, $R_a = +\infty$ ce qui valide le calcul de la question précédente et montre que y est solution de $(\mathscr{E}_d)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{N},\ (\mathscr{E}_\lambda) \text{ admet une solution polynomiale de degré } d \text{ si et seulement si } \lambda = d.}$$

I.3.2 Si φ_d existe, on a nécessairement $a_0 = 1$ et réciproquement, la question précédente montre qu'en prenant $a_0 = 1$, on obtient un polynôme de degré d solution de $(\mathscr{E}_d)$ sur $\mathbb{R}$ et prenant la valeur 1 en 0.

I.3.3 Si $d = 1$, on a $a_1 = \dfrac{(1+1)(1-0)}{1^2}a_0 = 2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = 2x+1.}$$

I.3.4 Posons $F = \dfrac{8X^2+8X+1}{X(X+1)(2X+1)}$ et $G = \dfrac{1}{X(X+1)(2X+1)^2}$.

- $a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2+8x+1}{(x+1)(2x+1)} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to -1}(x+1)F(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{8x^2+8x+1}{x(2x+1)} = 1$ et $c = \lim\limits_{x\to -1/2}(2x+1)F(x) = \lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{8x^2+8x+1}{x(x+1)} = \dfrac{2-4+1}{-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}} = 4$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-\frac{1}{2}\},\ \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}.}$$

- $a' = \lim\limits_{x\to 0} xG(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x+1)(2x+1)^2} = 1$, $b' = \lim\limits_{x\to -1}(x+1)G(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x(2x+1)^2} = -1$ puis

$$\begin{aligned}
G - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} &= \frac{1}{X(X+1)(2X+1)^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} = \frac{1-(X+1)(2X+1)^2 + X(2X+1)^2}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{1-(2X+1)^2}{X(X+1)(2X+1)^2}\\
&= \frac{-4X^2-4X}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{-4X(X+1)}{X(X+1)(2X+1)^2} = \frac{-4}{(2X+1)^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-\frac{1}{2}\},\ \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}.}$$

Résolvons alors l'équation $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0,+\infty[$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Posons $f = \varphi_1 z$ ou encore pour $x \in]0,+\infty[$, posons $z(x) = \dfrac{f(x)}{(2x+1)}$. z est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
x(x+1)f''(x) + (2x+1)f'(x) - 2f(x) &= x(x+1)[(2x+1)z''(x) + 4z'(x)] + (2x+1)[(2x+1)z'(x) + 2z(x)] - 2(2x+1)z(x)\\
&= x(x+1)(2x+1)z''(x) + [4x(x+1) + (2x+1)^2]z'(x)\\
&= x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2+8x+1)z'(x).
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathscr{E}_1) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2+8x+1)z'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ z''(x) + \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}z'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ z''(x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}\right)z'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \exp(\ln x + \ln(x+1) + 2\ln(2x+1))z''(x) +\\
&\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}\right)\exp(\ln x + \ln(x+1) + 2\ln(2x+1))z'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (x(x+1)(2x+1)^2 z')'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0\ z'(x) = \frac{\mu}{x(x+1)(2x+1)^2}\\
&\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0\ z'(x) = \mu(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2})\\
&\Leftrightarrow \exists (\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > 0\ z(x) = \mu(\ln x - \ln(x+1) + \frac{2}{2x+1}) + \nu
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathscr{E}_1) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \exists(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>0\ \frac{f(x)}{2x+1} = \mu\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2}{2x+1}\right)+\nu \\
&\Leftrightarrow \exists(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>0\ f(x) = \mu\left((2x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+2\right)+\nu(2x+1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } \mathscr{E}_1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } x\mapsto \mu\left((2x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+2\right)+\nu(2x+1),\ (\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2.}$$

I.4 I.4.1 Si $a_0 = 0$ alors tous les a_n sont nuls et y est identiquement nulle. Si $a_0 \neq 0$, $y(0) = a_0 \neq 0$ et y n'est pas identiquement nulle. Finalement y n'est pas identiquement nulle si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, puisque $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ et que $\lambda \notin \mathbb{N}$, aucun des rapports $\frac{(\lambda-n)(n+\lambda+1)}{(n+1)^2}$ n'est nul et donc par récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n \neq 0$.

Soient $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|\lambda-n|(n+\lambda+1)}{(n+1)^2}|x|.$$

Quand n tend vers $+\infty$, cette dernière expression tend vers $|x|$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, si $|x|<1$ la série de terme général $a_n x_n$ est absolument convergente et si $|x|>1$ la série de terme général $a_n x_n$ est grossièrement divergente. On en déduit que

$$\boxed{R_a = 1.}$$

I.4.2 Puisque $R_a > 0$, les calculs faits à la question I.2 sont valides. De plus $y(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$. Il existe donc une et une seule solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ développable en série entière sur $]-1,1[$ telle que $y(0) = 1$ à savoir la fonction φ_λ définie par

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \varphi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } a_0 = 1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda-n)(n+\lambda+1)}{(n+1)^2}a_n.}$$

I.4.3 Quand $\lambda = -\frac{1}{2}$, on obtient pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}-n\right)\left(n-\frac{1}{2}+1\right)}{(n+1)^2}a_n = -\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 a_n,$$

et donc pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n &= -\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \times -\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2 \times \ldots \times -\left(\frac{2.1-1}{2}\right)^2 \times a_0 \\
&= (-1)^n\left(\frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2}\right)^2 \\
&= (-1)^n\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 = \frac{(-1)^n}{2^{4n}}\binom{2n}{n}^2.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n}}\binom{2n}{n}^2 x^n.}$$

Quand $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(n + \frac{1}{2} + 1\right)}{(n+1)^2} a_n = -\frac{(2n-1)(2n+3)}{(2n+2)^2} a_n,$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n)^2} \times -\frac{(2n-5)(2n-1)}{(2n-2)^2} \times \ldots \times -\frac{(2\times 0-1)(2\times 0+3)}{(2)^2} \times a_0 \\
&= (-1)^n \frac{((2n-3)\times(2n-5)\times \times \ldots \times 1 \times -1) \times ((2n+1)\times(2n-1)\times \ldots \times 3)}{((2n)\times(2n-2)\times \ldots \times 4 \times 2)^2} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{((2n-1)\times(2n-3)\times \ldots \times 3)^2}{((2n)\times(2n-2)\times \ldots \times 4\times 2)^2} = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{((2n)\times(2n-1)\times \ldots \times 3 \times 2)^2}{((2n)\times(2n-2)\times \ldots \times 4 \times 2)^4} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n}} \frac{2n+1}{2n-1} \frac{(2n)!^2}{(n!)^4}.
\end{aligned}$$

ce qui est reste vrai pour $n = 0$ car $\dfrac{(-1)^{-1}}{2^0} \dfrac{1}{-1} \dfrac{(0)!^2}{(0!)^4} = 1$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{4n}} \frac{2n+1}{2n-1} \binom{2n}{n}^2 x^n.}$$

PARTIE II

II.1 Soient $a > 0$ puis $f : \begin{array}{ccc} [-1,a] \times [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \sqrt{1 + x\sin^2 t} \end{array}$.

- Soit $x \in [-1,a]$. Pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $1 + x\sin^2 t \geq 1 - \sin^2 t \geq 0$ et donc la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

  Ainsi, pour tout réel x de $[-1,a]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- De même, pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[-1,a]$.
- Enfin, pour $(x,t) \in [-1,a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|f(x,t)| = \sqrt{1 + x\sin^2 t} \leq \sqrt{1 + a\sin^2 t} = f(a,t) = \varphi(t)$ où φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction ψ est définie et continue sur tout segment de $[-1, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est continue sur } [-1, +\infty[.}$$

II.2 On se donne deux réels a et b tels que $-1 < a < b$ et on pose $f : \begin{array}{ccc} [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \sqrt{1 + x\sin^2 t} \end{array}$.

- f admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x et pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(x,t) \in [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) &= (\sin^2 t)^k \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \ldots \times \left(\frac{1}{2} - (k-2)\right) \times \left(\frac{1}{2} - (k-1)\right)(1 + x\sin^2 t)^{\frac{1}{2} - k} \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \times 1 \times 3 \times \ldots (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1 + x\sin^2 t)^{k - \frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

- De nouveau, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, pour chaque x de $[a,b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour chaque t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(x,t) \in [a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = \frac{1}{2^k} \times 1 \times 3 \times \ldots (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1 + x\sin^2 t)^{k-\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2^k} \times 1 \times 3 \times \ldots (2k-3) \frac{\sin^{2k} t}{(1 + a\sin^2 t)^{k-\frac{1}{2}}} = \varphi_k(t),$$

où φ_k est une fonction continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

D'après une généralisation du théorème de Leibniz, ψ est de classe C^∞ sur tout segment de $]-1,+\infty[$ et donc sur $]-1,+\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

II.3 II.3.1 On sait que pour $u \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} u^n.$$

On prend en particulier $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1) \times \ldots \times (\frac{1}{2} - (n-1))}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}(2-1) \times (2 \times 2 - 1) \times \ldots \times (2(n-1)-1) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times \frac{(1 \times 3 \times \ldots \times (2n-5) \times (2n-3)) \times (2 \times 4 \times \ldots \times (2n-4) \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n))}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n-4) \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{(2n-1) \times 2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall u \in]-1,1[,\ \sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.}$$

II.3.2 D'après la question précédente, pour $(x,t) \in]-1,1[\times [0, \frac{\pi}{2}]$, puisque $x\sin^2 t \in]-1,1[$, on a

$$\sqrt{1 + x\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sin^{2n} t x^n.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sin^{2n} t x^n$.

- Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|f_n(t)| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sin^{2n} t x^n\right| = \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sin^{2n} t x^n \leq \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n.$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série numérique convergente (de somme $-\sqrt{1-x}$) et donc la série de fonctions de terme général f_n est normalement et donc uniformément convergente sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. On eput donc intégrer terme à terme et on obtient :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sin^{2n} t x^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\ dt\right) x^n.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\ dt\right) x^n.}$$

II.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration parties fournit

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{2n-1} t \, dt = \left[-\cos t \sin^{2n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)((2n-1)\cos t \sin^{2n-2} t) \, dt \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2n-2} t \, dt = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^{2n-2} t \, dt \\
&= (2n-1)(I_{n-1} - I_n).
\end{aligned}$$

Par suite, $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.}$$

$I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

Mais alors

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2.$$

Par suite,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n.}$$

II.3.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\pi} I_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \leq 1 \times 1 \times \ldots \times 1 = 1,$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq 1.}$$

II.3.5 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, posons $\psi_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n$. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on a donc $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$.

- Chaque fonction ψ_n est continue et intégrable sur $]-1,1[$ car prolongeable par continuité en -1 et en 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{-1}^{1} |\psi_n(x)| \, dx = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \int_{-1}^{1} |x|^n \, dx = \frac{2}{(2n-1)(n+1)} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \leq \frac{2}{(2n-1)(n+1)}.$$

Maintenant, puisque $\frac{2}{(2n-1)(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$, la série numérique de terme général $\frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ converge et on déduit que la série numérique de terme général $\int_{-1}^{1} |\psi_n(x)|\ dx$ converge. On sait alors que l'on peut intégrer terme à terme et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \psi(x)\ dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1}^{1} \psi_n(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} x^n\ dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p-1}}{2(2p)-1} \left(\frac{(2(2p))!}{2^{2(2p)}((2p)!)^2}\right)^2 \frac{1-(-1)^{2p+1}}{2p+1} \text{ (quand } n \text{ est impair } 1-(-1)^{n+1} = 1-1 = 0) \\
&= -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4p-1} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2 \frac{2}{2p+1} = -2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \psi(x)\ dx = -2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2.}$$

II.4 On rappelle que pour $x \in]-1,1[$,

- $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n.$
- $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n.$
- $\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n.$

Par suite,

$$\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(-1 + \frac{2n+1}{2n-1}\right) \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n = 2\psi(x).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x)).}$$

II.5 On sait que $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt$ et donc

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\ dt = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\ dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\ dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2(1-\sin^2 t)}\ dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 t}\ dt \\
&= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2-a^2}{a^2}\sin^2 t}\ dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, avec des notations usuelles, on sait que $e^2 = \frac{c^2a^2}{=}\frac{a^2-b^2}{a^2} = -\frac{b^2-a^2}{a^2}$ et finalement

$$\ell = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2 t}\ dt = 4a \times \frac{\pi}{2}\psi(-e^2) = 2a\pi\psi(-e^2) = a\pi(\varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{\frac{1}{2}}(e^2)).$$

$$\boxed{\ell = a\pi(\varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{\frac{1}{2}}(e^2)).}$$

PARTIE III

III.1 Posons $g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times]-1,1[& \to & \mathbb{R}\\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{1+x\sin^2 t}\end{array}$.

- Pour chaque $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x\sin^2 t}$ est continue par morceaux sur $]-1,1[$ (puisque $\forall(t,x)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$, $1+x\sin^2 t\geq 1-\sin^2 t\geq 0$) et pour chaque $x\in]-1,1[$, la fonction $t\mapsto\sqrt{1+x\sin^2 t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$, $|g(x,t)|=\sqrt{1+x\sin^2 t}\leq\sqrt{2}=\varphi_0(x)$ où la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur $]-1,1[$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres permet alors d'affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, clairement 2π-périodique.

$$\boxed{f\text{ est définie et continue sur }\mathbb{R}\text{ et }2\pi\text{-périodique.}}$$

III.2 Pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$, on a $1+x\sin^2 t\geq 1-|x|>0$. On en déduit que g admet sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$ une dérivée partielle par rapport à t et pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{x\sin t\cos t}{\sqrt{1+x\sin^2 t}}.$$

Pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$, on a de plus

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{|x||\sin t||\cos t|}{\sqrt{1+x\sin^2 t}}\leq\frac{|x||\sin t||\cos t|}{\sqrt{1-|x|\sin^2 t}}\leq\frac{|\sin t||\cos t|}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=|\sin t|\leq 1=\varphi_1(x),$$

où φ_1 est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $]-1,1[$. Comme de plus pour chaque $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{x\sin t\cos t}{\sqrt{1+x\sin^2 t}}$ est continue par morceaux sur $]]-1,1[$ et pour chaque $x\in]-1,1[$, la fonction $t\mapsto\dfrac{x\sin t\cos t}{\sqrt{1+x\sin^2 t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de LEIBNIZ permet alors d'affirmer que

$$\boxed{f\text{ est de classe }C^1\text{ sur }\mathbb{R}.}$$

III.3 f est paire et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(f)=0$. Pour tout réel t, on a aussi $f(t+\pi)=f(t)$. Soit alors $n\in\mathbb{N}$. En posant $t=u+\pi$, on obtient

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\ dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+\pi)\cos(n(u+\pi))\ du=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos(nu)\ du=(-1)^n a_n(f).$$

En particulier, si n est impair, on a $a_n(f)=-a_n(f)$ et donc $a_n(f)=0$.

Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, le théorème de DIRICHLET permet d'affirmer que la série de FOURIER converge (normalement) sur $\mathbb{R}$ et que f est la somme de sa série de FOURIER.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}(f)\cos(2nt).}$$

III.4

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\ dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x\sin^2 t}\ dx\right)\ dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{1+x\sin^2 t}\ dt\right)\ dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+x\sin^2 t}\ dt\right)\ dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}4\times\frac{\pi}{2}\times\psi(x)\ dx=\int_{-1}^{1}\psi(x)\ dx\\&=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_0=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2.}$$

