SESSION 2006

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

PARTIE I

I.1 Notons $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY,$$

en identifiant le réel $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et la matrice de format $(1, 1)$ ${}^t XY$. D'autre part, ${}^t YX = (y|x) = (x|y) = {}^t XY$. Ainsi,

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y) = {}^t XY = {}^t YX.}$$

I.2 a) D'après le cours, on sait que

$$\boxed{\forall x \in F,\ p(x) = \sum_{i=1}^{k} (x|e_i)\, e_i.}$$

b) i) Soit $z \in F$. En identifiant un vecteur et sa matrice dans $\mathcal{C}$, on obtient

$$\begin{aligned} M(p)Z = p(z) &= \sum_{i=1}^{k} (z|e_i)\, e_i = \sum_{i=1}^{k} E_i \left({}^t E_i Z\right) \text{ (prendre garde au format)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i Z \end{aligned}$$

Finalement, $\forall z \in F,\ M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i Z$.

ii) et donc

$$\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i.}$$

c) Soit $z \in F$. Par définition du projeté orthogonal d'un vecteur, on a $p(z) \in F$ et $z - p(z) \in F^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geq \|p(z)\|^2,$$

et donc

$$\boxed{\forall z \in F,\ \|p(z)\| \leq \|z\|.}$$

I.3 Exemple : **a)** Notons p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Mais alors, puisque M est une matrice symétrique, p est un endomorphisme symétrique. D'autre part

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

Ainsi, M est idempotente et donc p est un projecteur. Comme de plus, p est un endomorphisme symétrique,

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal.}}$$

b) Les deux dernières colonnes de M sont les opposées des deux premières et donc M est une matrice de rang au plus 2. Mais les deux premières colonnes de M ne sont pas colinéaires et donc M est une matrice de rang au moins 2. Finalement M est une matrice de rang 2 ou encore p est un projecteur de rang 2. $\mathrm{Im}(p)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(p)$ est un sous-espace de dimension $4 - 2 = 2$. On obtiendra une base de chacun de ces sous-espaces en fournissant deux vecteurs non colinéaires de chacun de ces sous-espaces.

Les deux premières colonnes de M sont les matrices de deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(p)$. Ces deux vecteurs sont clairement orthogonaux et en les normant on obtient une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$.

$$\boxed{\text{Une base orthonormale de } \mathrm{Im}(p) \text{ est } (u_3, u_4) \text{ où } u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0) \text{ et } u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1).}$$

La somme des première et troisième colonnes de M est nulle. Il en est de même de la somme des deuxième et quatrième colonne de M. Ceci signifie que les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ sont dans le noyau de p. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, orthogonaux et en les normant on obtient une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(p)$.

$$\boxed{\text{Une base orthonormale de } \mathrm{Ker}(p) \text{ est } (u_1, u_2) \text{ où } u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) \text{ et } u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1).}$$

I.4 **a)** Puisque $\lambda \neq 0$, on a

$$u = \frac{1}{\lambda} p \circ r(u) = p(\frac{1}{\lambda} r(u)) \in \mathrm{Im}(p) = H.$$

D'autre part, on sait que l'image de p est constituée des vecteurs invariants par p et donc, puisque $u \in \mathrm{Im}(p)$,

$$p(r(u) - \lambda u) = p \circ r(u) - \lambda p(u) = p \circ r(u) - \lambda u = 0.$$

Mais alors

$$p \circ r(u) - \lambda u \in \mathrm{Ker}(p) = H^{\perp}.$$

$$\boxed{u \in H \text{ et } r(u) - \lambda u \in H^{\perp}.}$$

b) Puisque $u \in H$ et que $r(u) - \lambda u \in H^{\perp}$, on a $(u|r(u) - \lambda u) = 0$ et donc $\lambda \|u\|^2 = \lambda\,(u|u) = (u|r(u))$. Mais $r(u)$ est dans F et $u - r(u)$ est dans $F^{\perp}$. On en déduit que

$$(u|r(u)) = (u - r(u)|r(u)) + (r(u)|r(u)) = (r(u)|r(u)) = \|r(u)\|^2.$$

Finalement,

$$\boxed{\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2.}$$

c) Mais alors, puisque u n'est pas le vecteur nul et que $\lambda \neq 0$, la question I.2 c) permet d'affirmer que

$$0 < \lambda = \left(\frac{\|r(u)\|}{\|u\|}\right)^2 \leq 1.$$

En résumé, ou bien $\lambda = 0$ ou bien $\lambda \neq 0$ et dans ce cas $\lambda \in [0, 1]$.

$$\boxed{\text{Si } p \circ r \text{ a des valeurs propres, celles-ci sont dans le segment } [0, 1].}$$

I.5 **a)** Puisque p et r commutent, on a

$$(p \circ r)^2 = p \circ r \circ p \circ r = p \circ p \circ r \circ r = p \circ r,$$

ce qui montre que $p \circ r$ est un projecteur. D'autre part, puisque p et r sont des projecteurs orthogonaux et donc des endomorphismes symétriques de F, pour tout vecteur x et y de F on a

$$(p \circ r(x)|y) = (r(x)|p(y)) = (x|r \circ p(y)) = (x|p \circ r(y)).$$

Ainsi, $p \circ r$ est un projecteur symétrique de F et donc

$$\boxed{p \circ r \text{ est un projecteur orthogonal de } F.}$$

b) Par hypothèse, $p \circ r \neq 0$. D'autre part, puisque $\dim(H) < \dim(F)$, p n'est pas un automorphisme de F. $p \circ r$ ne l'est pas davantage car $\det(p \circ r) = \det(p)\det(r) = 0$. En particulier, $p \circ r$ n'est pas l'identité. En résumé, $p \circ r$ est un projecteur distinct de 0 et de Id. On sait alors que le spectre de $p \circ r$ est $\{0, 1\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(p \circ r) = \{0, 1\}.}$$

c) • Si x est un vecteur de $\mathrm{Ker}(p)$, alors $p(r(x)) = r(p(x))) = r(0) = 0$ de sorte que $x \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p \circ r)$. De même, $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p \circ r)$. Mais alors, puisque $\mathrm{Ker}(p \circ r)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a encore

$$\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p \circ r).$$

Réciproquement, si x est un vecteur de $\mathrm{Ker}(p \circ r)$, on a $x = x - p(x) + p(x)$ avec $r(p(x)) = p(r(x)) = 0$ (ce qui montre que $p(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(r)$) et $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$ (ce qui montre que $x - p(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(p)$). Tout vecteur de $\mathrm{Ker}(p \circ r)$ est donc la somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(p)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(r)$ ce qui montre que

$$\mathrm{Ker}(p \circ r) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r).$$

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r).}$$

• Pour tout vecteur x, on a $p(r(x)) \in \mathrm{Im}(p)$ et $p(r(x)) = r(p(x)) \in \mathrm{Im}(r)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}(r)$ et donc que

$$\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r).$$

Réciproquement, si x est dans $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$, on sait que x est invariant par p et par r. On en déduit que $p(r(x)) = p(x) = x$. Ainsi, x est invariant par le projecteur $p \circ r$ et donc dans $\mathrm{Im}(p \circ r)$. Ceci montre que

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p \circ r).$$

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r).}$$

I.6 **a)** Un calcul par blocs founit

$$R^2 = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A^2 + BC = A \text{ et } AB + BD = B \text{ et } CA + DC = C \text{ et } CB + D^2 = D.$$

D'autre part, puisque la base considérée est orthonormale et que r est symétrique, la matrice R est symétrique. Or

$$
\begin{aligned}
{}^tR = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow {}^tA = A \text{ et } {}^tB = C; \text{et } {}^tD = D.
\end{aligned}
$$

b) iii) $\Rightarrow$ iv). Si $C = 0$ alors d'après a) $B = 0$.
Mais alors $PR = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $PR = RP$ et donc p et r commutent.

iv) $\Rightarrow$ i). C'est la question I.5 b)

i) $\Rightarrow$ ii). D'après la question a), A est une matrice symétrique réelle et donc d'après le théorème spectral, A est diagonalisable. Déterminons le spectre de A.

On a $PR = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On sait alors que le polynôme caractéristique de A divise le polynôme caractéristique de PR et donc que le spectre de A est contenu dans $\{0, 1\}$ (puisque par hypothèse le spectre de PR est contenu dans $\{0, 1\}$).

Ainsi, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D de la forme $\text{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Mais alors

$$A^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

D'après la question a), on a $A = A^2 + BC = A^2 + {}^tCC$ et donc ${}^tCC = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Posons $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m-k, 1 \leq j \leq k}$. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, le coefficient ligne i, colonne i de la matrice ${}^tCC$ vaut $\sum_{j=1}^{m-k} c_{j,i}c_{j,i} = \sum_{j=1}^{m-k} c_{j,i}^2$. Puisque la matrice ${}^tCC$ est nulle, pour $i \in [\![1, k]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{m-k} c_{j,i}^2 = 0$ et donc, $\forall (i, j) \in [\![1, m-k]\!] \times [\![1, k]\!]$, $c_{i,j} = 0$ (puisque les $c_{j,i}^2$ sont des réels positifs). On en déduit que $C = 0$.

PARTIE II

II.1 Notons $f(x_0)$ la projection orthogonale de v sur $\text{Im}(f)$. Soit x un vecteur de E. On a $f(x_0) - f(x) \in \text{Im}(f)$ et $v - f(x_0) \in F^\perp$. Le théorème de PYTHAGORE permet alors d'écrire

$$\|v - f(x)\|^2 = \|(v - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x))\|^2 = \|v - f(x_0)\|^2 + \|f(x_0) - f(x)\|^2 \geq \|v - f(x_0)\|^2 \quad \text{(I)},$$

avec égalité effectivement obtenue pour $x = x_0$. Donc

$$\boxed{\forall v \in F, \ \exists x_0 \in E / \ \|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.}$$

II.2 Supposons de plus que f soit une application injective. L'inégalité (I) de la question précédente est une égalité si et seulement si $f(x_0) - f(x) = 0$ ou encore $f(x) = f(x_0)$. Cette dernière égalité équivaut à $x = x_0$ puisque f est injective, ce qui démontre l'unicité d'une pseudo-solution de l'équation $(*)$.

II.3 Soit $x_0 \in E$.

$$
\begin{aligned}
x_0 \text{ est une pseudo-solution de } (*) &\Leftrightarrow f(x_0) \text{ est la projection orthogonale de } v \text{ sur Im}(f) \\
&\Leftrightarrow v - f(x_0) \in (\text{Im}(f))^\perp \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E, \ (f(x)|f(x_0) - v) = 0.
\end{aligned}
$$

II.4 En notant n la dimension de E,

$$
\begin{aligned}
\forall x \in E, \ (f(x)|f(x_0) - v) = 0 &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^t(AX)(AX_0 - V) = 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^tX\left({}^tA(AX_0 - V)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow {}^tA(AX_0 - V) \in (\mathscr{M}_{n,1})^\perp \\
&\Leftrightarrow {}^tA(AX_0 - V) = 0 \Leftrightarrow {}^tAAX_0 = {}^tAV.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\boxed{\forall x_0 \in E,\ (x_0 \text{ pseudo-solution de } (*) \Leftrightarrow {}^tAAX_0 = {}^tAV).}$$

II.5 Exemple : D'une part

$${}^tAV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Posons alors $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$x_0 \text{ pseudo-solution de } (*) \Leftrightarrow {}^tAAX_0 = {}^tAX_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3c = 0 \\ 6b = 3 \\ -3a + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ c = a \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Les pseudos solutions de } (*) \text{ sont les vecteurs de la forme } (a, \tfrac{1}{2}, a),\ a \in \mathbb{R}.}$$

II.6 Application : a) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement est

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Soit v l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $V = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Notons $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ la matrice de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice de $f(x) - v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 - c_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 - c_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu b_n - c_n \end{pmatrix}.$$

Si on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée et

$$\|f(x) - v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2.$$

Le problème posé équivaut alors à trouver les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

b) f est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$ ce qui équivaut au fait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2 (par le théorème du rang) ou encore au fait que $\text{rg}(A) = 2$ ou enfin au fait que les vecteurs a et b ne soient pas colinéaires.

$$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si la famille } (a, b) \text{ est libre.}}$$

c) Supposons donc les vecteurs a et b non colinéaires. D'après la question II.2, l'équation $f(x) = v$ admet une et une seule pseudo-solution x_0 et d'après la question II.4, x_0 est la solution de l'équation ${}^tAAX_0 = {}^tAV$. Ainsi, en posant $X_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
x_0 \text{ pseudo-solution de } (*) &\Leftrightarrow {}^tAAX_0 = {}^tAV \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{\begin{vmatrix} (a|c) & (a|b) \\ (b|c) & \|b\|^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{vmatrix}} \text{ et } \mu = \frac{\begin{vmatrix} \|a\|^2 & (a|c) \\ (a|b) & (b|c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{vmatrix}} \text{ (formules de Cramer)} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{(a|c)\,\|b\|^2 - (b|c)\,(a|b)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \text{ et } \mu = \frac{(b|c)\,\|a\|^2 - (a|c)\,(a|b)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(a|c)\,\|b\|^2 - (b|c)\,(a|b)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \text{ et } \mu = \frac{(b|c)\,\|a\|^2 - (a|c)\,(a|b)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2}.}$$

PARTIE III

III.1 a) et b) Notons n la dimension de E et m la dimension de F.
$(\text{Kerf})^\perp$ est un supplémentaire de Kerf dans E. Donc, la restriction de f à $(\text{Kerf})^\perp$ est un isomorphisme de $(\text{Kerf})^\perp$ sur $f\left((\text{Kerf})^\perp\right)$. On en déduit que

$$\dim\left(f\left((\text{Kerf})^\perp\right)\right) = \dim\left((\text{Kerf})^\perp\right) = n - \dim(\text{Kerf}).$$

Ensuite, $\dim\left((\text{Imf})^\perp\right) = m - \dim(\text{Imf}) = m - n + \dim(\text{Kerf})$. Par suite

$$\dim\left(f\left((\text{Kerf})^\perp\right)\right) + \dim\left((\text{Imf})^\perp\right) = n - \dim(\text{Kerf}) + m - n + \dim(\text{Kerf}) = m = \dim(F).$$

D'autre part, on a bien sûr $f\left((\text{Kerf})^\perp\right) \cap (\text{Imf})^\perp = \{0\}$ et en résumé
- $\dim\left(f\left((\text{Kerf})^\perp\right)\right) + \dim\left((\text{Imf})^\perp\right) = \dim(F)$,
- $f\left((\text{Kerf})^\perp\right) \cap (\text{Imf})^\perp = \{0\}$.

On sait alors que

$$F = (\text{Kerf})^\perp \oplus (\text{Imf})^\perp.$$

et donc

$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists!(x, y') \in (\text{Kerf})^\perp \times (\text{Imf})^\perp / \ y = f(x) + y'.}$$

c) Soient $(y_1, y_2) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(x_1, y_1', x_2, y_2') \in (\text{Kerf})^\perp \times (\text{Imf})^\perp \times (\text{Kerf})^\perp \times (\text{Imf})^\perp$ tel que $y_1 = f(x_1) + y_1'$ et $y_2 = f(x_2) + y_2'$. Mais alors

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda(f(x_1) + y_1') + \mu(f(x_2) + y_2') = f(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1' + \mu y_2').$$

Maintenant $(\text{Kerf})^\perp$ et $(\text{Imf})^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement. On en déduit que $\lambda x_1 + \mu x_2 \in (\text{Kerf})^\perp$ et $\lambda y_1' + \mu y_2' \in (\text{Imf})^\perp$. Mais alors

$$g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda g(y_1) + \mu g(y_2).$$

Finalement

$$\boxed{g \in \mathcal{L}(F, E).}$$

III.2 Soient $y \in F$ puis $(x, y') \in (\mathrm{Ker} f)^\perp \times (\mathrm{Im} f)^\perp$ tel que $y = f(x) + y'$.

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Ker} g &\Leftrightarrow g(y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ (car } f_{/(\mathrm{Ker} f)^\perp} \text{ est injective)} \\ &\Leftrightarrow y = y' \Leftrightarrow y \in (\mathrm{Im} f)^\perp. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker} g = (\mathrm{Im} f)^\perp$. Mais alors le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim(\mathrm{Im} g) = \dim(F) - \dim(\mathrm{Ker} g) = m - \dim((\mathrm{Im} f)^\perp) = \dim(\mathrm{Im} f) = n - \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim((\mathrm{Ker} f)^\perp).$$

Ainsi, $\mathrm{Im} g \subset (\mathrm{Ker} f)^\perp$ et $\dim(\mathrm{Im} g) = \dim((\mathrm{Ker} f)^\perp)$. On en déduit que $\mathrm{Im} g = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

$$\boxed{\mathrm{Ker} g = (\mathrm{Im} f)^\perp \text{ et } \mathrm{Im} g = (\mathrm{Ker} f)^\perp.}$$

III.3 a) Soit p la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$. Soit $x \in E$.
- Si $x \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$, l'égalité $f(x) = f(x) + 0$ montre que $g(f(x)) = x = p(x)$.
- Si $x \in \mathrm{Ker} f$, $g(f(x)) = g(0) = 0 = p(x)$.

Ainsi les endomorphismes de E $g \circ f$ et p coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires de E et sont donc égaux.

$$\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\mathrm{Ker} f)^\perp.}$$

b) Montrons tout d'abord que f est le pseudo-inverse de g. Soit $x \in E$. Déjà $f(x) \in \mathrm{Im} f = (\mathrm{Ker} g)^\perp$ (d'après la question III.2). D'autre part, d'après la question a), $g(f(x))$ est le projeté orthogonal de x sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ et donc $x - g(f(x)) \in \mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f g)^\perp$ (d'après la question III.2). En résumé,

$$\forall x \in E,\ x = g(f(x)) + (x - g(f(x))) \text{ avec } (f(x), x - g(f(x))) \in (\mathrm{Ker} g)^\perp \times (\mathrm{Im} g)^\perp.$$

Ceci démontre que f est le pseudo-inverse de g. En appliquant le a) à g, on obtient le fait que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal sur $(\mathrm{Ker} g)^\perp = \mathrm{Im} f$.

$$\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal sur } \mathrm{Im} f.}$$

III.4 Premier exemple : $\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\} = \{(x, -x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$. Mais alors $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ est le plan de vecteur normal $u = (1, -1, 1)$ ou encore le plan d'équation $x - y + z = 0$.

Puisque les deux premières colonnes de la matrice de f ne sont pas colinéaires, f est de rang 2 et donc $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$. Mais alors, $(\mathrm{Im} f)^\perp = \{0\}$.

Soient alors $y = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$x = g(y) \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Ker} f)^\perp \text{ et } y - f(x) \in (\mathrm{Im} f)^\perp \Leftrightarrow x|u = 0 \text{ et } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = a \\ \beta + \gamma = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = a - \beta \\ \gamma = b - \beta \\ (a - \beta) - \beta + (b - \beta) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{1}{3}(a + b) \\ \alpha = \dfrac{1}{3}(2a - b) \\ \gamma = \dfrac{1}{3}(-a + 2b) \end{array}\right.$$

Ainsi, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ g((a, b)) = \dfrac{1}{3}(2a - b, a + b, -a + 2b)$.

La matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donc

$$\boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

III.5 a) Soit $x \in \text{Ker}f$. Puisque f est symétrique, pour tout vecteur x' de E, on a

$$(x|f(x')) = (f(x)|x') = (0|x') = 0.$$

Ainsi, tout élément de Kerf est dans $(\text{Im}f)^{\perp}$ et donc $\text{Ker}f \subset (\text{Im}f)^{\perp}$. Comme de plus

$$\dim(\text{Ker}f) = \dim(E) - \dim(\text{Im}f) = \dim((\text{Im}f)^{\perp}),$$

on a montré que $\text{Ker}f = (\text{Im}f)^{\perp}$ puis, par passage aux orthogonaux, que $\text{Im}f = (\text{Ker}f)^{\perp}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est symétrique, } \text{Ker}f = (\text{Im}f)^{\perp} \text{ et } \text{Im}f = (\text{Ker}f)^{\perp}.}$$

b) Soient x un vecteur propre de f puis λ la valeur propre associée.

Si $\lambda = 0$, $x \in \text{Ker}f = (\text{Im}f)^{\perp} = \text{Ker}g$. On a alors $g(x) = 0$ ce qui montre que x est un vecteur propre de g.

Si $\lambda \neq 0$, $x = \frac{1}{\lambda}f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \text{Im}f = (\text{Ker}g)^{\perp}$. Mais alors $g(x) = g\left(\frac{1}{\lambda}f(x)\right)) = \frac{1}{\lambda}g(f(x)) = \frac{1}{\lambda}x$ puisque d'après la question III.a), $g \circ f$ est la projection orthogonale sur $(\text{Ker}g)^{\perp}$. Encore une fois, x est vecteur propre de g.

$$\boxed{\text{Tout vecteur propre de } f \text{ est aussi vecteur propre de } g.}$$

c) Puisque f est symétrique, le théorème spectral permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f. D'après la question b), une telle base est encore une base orthonormée de vecteurs propres de g. Puisque g diagonalise dans une base orthonormée, g est symétrique.

III.6 Deuxième exemple : Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 2 & 2-X & 0 \\ 2 & 0 & 4-X \end{vmatrix} = (3-X)(2-X)(4-X) - 2.2(4-X) - 2.2(2-X) = (3-X)(2-X)(4-X) - 8(3-X)$$
$$= (3-X)(X^2-6X) = -X(X-3)(X-6).$$

Déterminons le sous-espaces propres de f.

$$(x,y,z) \in \text{Ker}f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y+2z=0 \\ 2x+2y=0 \\ 2x+4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z \\ y=2z \end{array}\right.$$

Donc $\text{Ker}f = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(f-3\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y+2z=0 \\ 2x-y=0 \\ 2x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x \\ z=-2x \end{array}\right.$$

Donc $\text{Ker}(f-3\text{Id}) = \text{Vect}(u_2)$ où $u_2 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(f-6\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+2y+2z=0 \\ 2x-4y=0 \\ 2x-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=2y \end{array}\right.$$

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(u_3)$ où $u_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$.

D'après la question précédente, on a $g(u_1) = 0$, $g(u_2) = \frac{1}{3}u_2$ et $g(u_3) = \frac{1}{6}u_3$. Ainsi, si on note A' la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, P la matrice de passage de la base canonique à la base (orthonormée) (u_1, u_2, u_3) et D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, on a $A' = PDP^{-1} = PD{}^tP$. Ainsi

$$A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de g dans la base canonique est

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.}$$

