

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

 MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Si $n = 0$, $P_n(m) = 1$ et si $n \geq 1$,

$$P_n(m) = \prod_{k=1}^n (m+k) = \prod_{k=m+1}^{m+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{m+n} k}{\prod_{k=1}^m k} = \frac{(m+n)!}{m!},$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, P_n(m) = \frac{(m+n)!}{m!}.$$

I.2. Puisque α n'est pas un entier strictement négatif, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha) \neq 0$ et donc, pour tout entier naturel n , la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$ est définie sur \mathbb{R} .

Soit x un réel non nul. Pour tout entier naturel n , $u_n(x) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{\prod_{k=1}^n (\alpha+k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (\alpha+k)} \\ &= \left(\frac{|x|}{2} \right)^2 \frac{1}{(n+1)(\alpha+n+1)}. \end{aligned}$$

Donc $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ tend vers $0 < 1$ quand n tend vers $+\infty$. Le critère de D'ALEMBERT permet alors d'affirmer que la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge. Comme ceci est vrai pour tout réel x , on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

I.3. I.3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. f_α est la somme d'une série entière de rayon infini et donc f_α est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et en particulier deux fois dérivable sur \mathbb{R} . De plus, les dérivées successives de f_α s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned}
xf''_{\alpha}(x) + (2\alpha + 1)f'_{\alpha}(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1)x^{2n-2}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)} + (2\alpha + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)x^{2n-1}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n-1) + (2\alpha + 1)) \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n-1)!P_n(\alpha)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-1)}(n+\alpha)}{2^{2n-2}(n-1)!P_n(\alpha)} \\
&= -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{2^{2(n-1)}(n-1)!P_{n-1}(\alpha)} = -x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)} \\
&= -xf_{\alpha}(x).
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf''_{\alpha}(x) + (2\alpha + 1)f'_{\alpha}(x) + xf_{\alpha}(x) = 0.$$

I.3.2. Soit y une fonction développable en série entière, paire et solution de (E_{α}) sur un voisinage de l'origine. Il existe un réel strictement positif R et une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Pour $x \in]-R, R[$, on a alors

$$\begin{aligned}
xy''(x) + (2\alpha + 1)y'(x) + xy(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (2n)(2n-1)a_n x^{2n-2} + (2\alpha + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} (2n)a_n x^{2n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1 + 2\alpha + 1)(2n)a_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^2 n(n+\alpha)a_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^2 n(n+\alpha)a_n x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^2 n(n+\alpha)a_n + a_{n-1}) x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (et en tenant compte du fait que $y(0) = a_0$),

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_{\alpha}) \text{ sur }]-R, R[&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^2 n(n+\alpha)a_n + a_{n-2} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{-1}{2^{2n}(n+\alpha)} a_{n-1} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{-1}{2^{2n}(n+\alpha)} \frac{-1}{2^{2(n-1)}(n-1+\alpha)} \cdots \frac{-1}{2^{2 \cdot 1}(1+\alpha)} a_0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!P_n(\alpha)} y(0).
\end{aligned}$$

D'après la question I.2., le rayon de convergence des séries entières obtenues est infini. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y(x) = y(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)} = y(0)f_{\alpha}(x).$$

Les solutions de (E_{α}) développables en série entière sont les fonctions de la forme λf_{α} , $\lambda \in \mathbb{R}$.

I.4. I.4.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. $-\alpha$ n'est pas un entier strictement négatif et donc g_{α} est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$g'_{\alpha}(x) = -2\alpha x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x)$$

puis, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$g''_{\alpha}(x) = (-2\alpha)(-2\alpha-1)x^{-2\alpha-2} f_{-\alpha}(x) + 2(-2\alpha)x^{-2\alpha-1} f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f''_{-\alpha}(x).$$

Mais alors pour tout réel x strictement positif

$$\begin{aligned} xg''_{\alpha}(x) + (2\alpha + 1)g'_{\alpha}(x) + xg_{\alpha}(x) &= x((-2\alpha)(-2\alpha - 1)x^{-2\alpha-2}f_{-\alpha}(x) + 2(-2\alpha)x^{-2\alpha-1}f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha}f''_{-\alpha}(x)) \\ &\quad + (2\alpha + 1)(-2\alpha x^{-2\alpha-1}f_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha}f'_{-\alpha}(x)) + x \cdot x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x) \\ &= x^{-2\alpha}(xf''_{-\alpha}(x) + (2\alpha + 1)f'_{-\alpha}(x) + xf_{-\alpha}(x)) - 4\alpha x^{-2\alpha}f'_{-\alpha}(x) \\ &= x^{-2\alpha}(xf''_{-\alpha}(x) + (-2\alpha + 1)f'_{-\alpha}(x) + xf_{-\alpha}(x)) \\ &= 0 \text{ (car } f_{-\alpha} \text{ est solution de } (E_{-\alpha}) \text{ sur }]0, +\infty[). \end{aligned}$$

g_{α} est solution de (E_{α}) sur $]0, +\infty[$.

I.4.2. Montrons que la famille de fonctions (f_{α}, g_{α}) est une famille libre de $C^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_{\alpha} + \mu g_{\alpha} = 0$. Ceci s'écrit encore

$$\forall x > 0, \lambda f_{\alpha}(x) + \mu x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x) = 0 \quad (1) \text{ ou aussi } \forall x > 0, \lambda x^{2\alpha}f_{\alpha}(x) + \mu f_{-\alpha}(x) = 0 \quad (2).$$

On a vu à la question I.3. que f_{α} et $f_{-\alpha}$ sont continues sur \mathbb{R} . En particulier, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f_{\alpha}(x)$ tend vers $f_{\alpha}(0) = \frac{(-1)^0}{2^0 \cdot 0! \Gamma_0(\alpha)} = 1$ et de même $f_{-\alpha}(x)$ tend vers $f_{-\alpha}(0) = 1$.

Si $\alpha < 0$, en faisant tendre x vers 0 dans l'égalité (1), on obtient $\lambda = 0$ puis, puisque g_{α} n'est pas la fonction nulle, $\mu = 0$.
Si $\alpha > 0$, en faisant tendre x vers 0 dans l'égalité (2), on obtient $\mu = 0$ puis, puisque f_{α} n'est pas la fonction nulle, $\lambda = 0$.
Dans tous les cas, on a obligatoirement $\lambda = \mu = 0$ ce qui montre que

la famille de fonctions (f_{α}, g_{α}) est une famille libre de $C^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_{α}) s'écrit

$$y''(x) + \frac{2\alpha + 1}{x}y'(x) + y(x) = 0.$$

(E_{α}) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et comme les deux fonctions $x \mapsto \frac{2\alpha + 1}{x}$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0, +\infty[$, on sait que l'ensemble solutions $\mathcal{S}_{\alpha,]0, +\infty[}$ de (E_{α}) sur $]0, +\infty[$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Comme la famille (f_{α}, g_{α}) est une famille libre de $\mathcal{S}_{\alpha,]0, +\infty[}$, de cardinal 2, on en déduit que cette famille est une base de $\mathcal{S}_{\alpha,]0, +\infty[}$. Par suite

Les solutions de (E_{α}) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $\lambda f_{\alpha} + \mu g_{\alpha}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

I.4.3. Soit y une fonction de classe C^2 sur $] -\infty, 0$. Pour $x > 0$, posons $z(x) = y(-x)$. z est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$. Mais alors

$$xz''(x) + (2\alpha + 1)z'(x) + xz(x) = xy''(-x) - (2\alpha + 1)y'(-x) + xy(-x) = -((-x)y''(-x) + (2\alpha + 1)y'(-x) + (-x)y(-x)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_{\alpha}) \text{ sur }] -\infty, 0[&\Leftrightarrow \forall t < 0, ty''(t) + (2\alpha + 1)y'(t) + ty(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, (-x)y''(-x) + (2\alpha + 1)y'(-x) + (-x)y(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, xz''(x) + (2\alpha + 1)z'(x) + xz(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E_{\alpha}) \text{ sur }]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Les solutions de (E_{α}) sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda f_{\alpha}(-x) + \mu g_{\alpha}(-x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

I.5. I.5.1. j_α est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} x^2 j_\alpha''(x) + x j_\alpha'(x) + x^2 j_\alpha(x) &= x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}f_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}f_\alpha'(x) + x^\alpha f_\alpha''(x)) + x(\alpha x^{\alpha-1}f_\alpha(x) + x^\alpha f_\alpha'(x)) + x^2 \cdot x^\alpha f_\alpha(x) \\ &= x^{\alpha+1}(x f_\alpha''(x) + (2\alpha+1)f_\alpha'(x) + x f_\alpha(x)) + (\alpha(\alpha-1) + \alpha)x^\alpha f_\alpha(x) \\ &= \alpha^2 x^\alpha f_\alpha(x) = \alpha^2 j_\alpha(x). \end{aligned}$$

Donc

$$j_\alpha \text{ est solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]0, +\infty[.$$

En remplaçant α par $-\alpha$, on obtient le fait que $j_{-\alpha}$ est solution de $(B_{-\alpha}) = (B_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$.

$$j_\alpha \text{ et } j_{-\alpha} \text{ sont solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }]0, +\infty[.$$

I.5.2. De même qu'à la question I.4.2., l'ensemble des solutions de (B_α) sur $]0, +\infty[$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Montrons que $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est une famille libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda j_\alpha + \mu j_{-\alpha} = 0 &\Rightarrow \forall x > 0, \lambda x^\alpha f_\alpha(x) + \mu x^{-\alpha} f_{-\alpha}(x) = 0 \Rightarrow \forall x > 0, \lambda f_\alpha(x) + \mu x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda f_\alpha + \mu g_\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \text{ (d'après la question I.4.2).} \end{aligned}$$

Encore une fois, on a trouvé une famille libre de solutions de cardinal 2 et donc une base de l'espace des solutions.

$$\text{Les solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }]0, +\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } \lambda j_\alpha + \mu j_{-\alpha}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Soient y une fonction de classe C^2 sur $] -\infty, 0[$ puis $z : x \mapsto y(-x)$. z est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. De plus

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (B_\alpha) \text{ sur }] -\infty, 0[&\Leftrightarrow \forall t < 0, t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \alpha^2) y(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, (-x)^2 y''(-x) + (-x) y'(-x) + ((-x)^2 - \alpha^2) y(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, x^2 y''(-x) - x y'(-x) + (x^2 - \alpha^2) y(-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - \alpha^2) z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Les solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }] -\infty, 0[\text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda j_\alpha(-x) + \mu j_{-\alpha}(-x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

PARTIE II

II.1. Soient $\alpha > -\frac{1}{2}$ puis $\Phi : \mathbb{R} \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. Nous allons montrer que
 $(x, t) \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$

- pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1[$
- Φ est deux fois dérivable par rapport à sa première variable x sur $\mathbb{R} \times [0, 1[$ et

- pour tout t de $[0, 1[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur \mathbb{R} .

- pour tout x réel, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, 1[$ et il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 continues par morceaux, positives et intégrables sur $[0, 1[$ telles que pour tout

$$(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_1(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi_2(t).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t de $[0, 1[$, on a $1 - t^2 > 0$ et donc la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1[$. De plus, pour $t \in [0, 1[$, $|\Phi(x, t)| \leq (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Or, la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ est continue sur $[0, 1[$ et quand t tend vers 1 par valeurs inférieures, $(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} = ((1 - t)(1 + t))^{\alpha - \frac{1}{2}} \sim 2^{\alpha - \frac{1}{2}}(1 - t)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ avec $\alpha - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$. Ainsi la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ et donc la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1[$.
- Φ est deux fois dérivable par rapport à sa première variable x sur $\mathbb{R} \times [0, 1[$ et pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt) \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt).$$

- Soit $t \in [0, 1[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues sur \mathbb{R} .
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues par morceaux sur $[0, 1[$ et de plus pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \leq (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} = \varphi_1(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \leq (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} = \varphi_2(t).$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et positives sur $[0, 1[$, intégrables sur $[0, 1[$ d'après ci-dessus. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), h_α est de classe C^2 sur \mathbb{R} et les dérivées successives de h_α s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'_\alpha(x) = - \int_0^1 t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt) dt \text{ et } h''_\alpha(x) = - \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt) dt.$$

II.2. II.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) &= -x \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt) dt + x \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt) dt = \int_0^1 (1 - t^2)(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} x \cos(xt) dt \\ &= \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} x \cos(xt) dt. \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} x \cos(xt) dt.$$

II.2.2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, 1[$. Les deux fonctions $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe C^1 sur $[0, a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} \int_0^a (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} x \cos(xt) dt &= \left[(1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} \sin(xt) \right]_0^a - \int_0^a \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) (-2t) (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt) dt \\ &= (1 - a^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} \sin(xa) + (2\alpha + 1) \int_0^a t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt) dt (*). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt)$ est intégrable sur $[0, 1[$. Donc, en faisant tendre a vers 1 dans l'égalité (*), on obtient

$$xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = (2\alpha + 1) \int_0^1 t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt) dt = -(2\alpha + 1)h'_\alpha(x).$$

$$h_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

II.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t de $[0, 1[$, on a

$$(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = (-1)^n (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$.

- Chaque fonction f_n est continue sur $[0, 1[$. De plus, quand t tend vers 1,

$$|f_n(t)| = (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = O((1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}),$$

ce qui montre que chaque fonction f_n est intégrable sur $[0, 1[$.

- La série de fonction de terme général f_n converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ qui est continue sur $[0, 1[$.

- Vérifions enfin que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \int_0^1 |f_k(t)| dt &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2k)!} x^{2k} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2k)!} x^{2k} \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2k)!} x^{2k} \right) dt = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt. \end{aligned}$$

Mais la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0, 1[$ car continue sur $[0, 1[$ et dominée en 1 par la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $[0, 1[$. On en déduit que $\int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt < +\infty$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \int_0^1 |f_k(t)| dt \leq \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt < +\infty.$$

Puisque la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général positif $\int_0^1 |f_n(t)| dt$ est majorée, la série de terme général $\int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge.

En résumé,

- Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $[0, 1[$,
- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction continue sur $[0, 1[$,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on peut alors écrire

$$h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} dt \right) x^{2n}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha) x^{2n}}{(2n)!} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, I_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} t^{2n} dt.$$

II.4. Puisque h_α est développable en série entière, la question I.3.2. permet d'écrire que

$$h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha = I_0(\alpha) f_\alpha.$$

II.5. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} = I_0(\alpha) \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n(\alpha) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} I_0(\alpha).$$

PARTIE III

III.1. *Calcul du laplacien en polaires.* Rappelons tout d'abord que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ puis que la matrice jacobienne de l'application $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ au point (r, θ) est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La formule de dérivation des fonctions composées fournit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(F(r \cos \theta, r \sin \theta))(r, \theta) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Puisque la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. En dérivant une deuxième fois par rapport à r , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \\ &= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

De même, dérivons deux fois par rapport à θ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} - r \sin \theta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) - r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} + r \cos \theta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial F}{\partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Delta F \end{aligned}$$

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \Delta F(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

III.2. D'après III.1., on a

$$\begin{aligned}\Delta F + \omega^2 F &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f(r)g(\theta)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(f(r)g(\theta)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(f(r)g(\theta)) + \omega^2(f(r)g(\theta)) \\ &= \frac{1}{r^2} ((r^2 f''(r) + r f'(r) + r^2 \omega^2 f(r))g(\theta) + f(r)g''(\theta))\end{aligned}$$

L'égalité $\Delta F + \omega^2 F = 0$ fournit alors

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, (r^2 f''(r) + r f'(r) + r^2 \omega^2 f(r)) g(\theta) + f(r)g''(\theta) = 0 \quad (*).$$

Soit de nouveau r_0 un réel tel que $f(r_0) \neq 0$ puis $\lambda = \frac{r_0^2 f''(r_0) + r_0 f'(r_0) + r_0^2 \omega^2 f(r_0)}{f(r_0)}$. L'égalité (*) fournit alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0.$$

L'égalité (*) s'écrit alors

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, (r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2 \omega^2 - \lambda)f(r)) g(\theta) = 0.$$

Cette dernière égalité est en particulier vérifiée pour un réel θ_0 tel que $g(\theta_0) \neq 0$ (θ_0 existe puisque F n'est pas identiquement nulle). Après simplification par $g(\theta_0)$, on obtient

$$\forall r \in]0, +\infty[, r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2 \omega^2 - \lambda)f(r) = 0.$$

Il existe un réel λ tel que

(i) $\forall r \in]0, +\infty[, r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2 \omega^2 - \lambda)f(r) = 0,$
et

(ii) $\forall \theta \in \mathbb{R}, g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0.$

III.2.3. • Si $\lambda < 0$, les solutions de (ii) sont les fonctions de la forme $g : \theta \mapsto a e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + b e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Une telle solution est périodique si et seulement si $a = b = 0$ et donc $g = 0$ ce qui est exclu. Donc $\lambda \geq 0$.

• Si $\lambda = 0$, alors $\lambda = 0^2$.

• Supposons maintenant $\lambda > 0$. Les solutions de (ii) sont les fonctions de la forme $g : \theta \mapsto a \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + b \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Une telle solution peut encore s'écrire sous la forme $\theta \mapsto A \cos(\sqrt{\lambda}\theta + \varphi)$ où A et φ sont deux réels. Si l'équation (ii) admet une solution non nulle et 2π -périodique alors la fonction $\theta \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}\theta + \varphi)$ est 2π -périodique ce qui impose à $2\pi\sqrt{\lambda}$ d'être un multiple entier de 2π et donc à $\sqrt{\lambda}$ d'être un entier. Ainsi il existe un entier naturel non nul p tel que $\sqrt{\lambda} = p$ ou encore $\lambda = p^2$.

$$\exists p \in \mathbb{N} / \lambda = p^2.$$

III.2.4. Si $p = 0$, g est une solution non nulle et 2π -périodique de l'équation $y'' = 0$ et donc g est une constante non nulle.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, g est une solution non nulle et 2π -périodique de l'équation $y'' + p^2 y = 0$ et donc g est une fonction de la forme $\theta \mapsto a \cos(p\theta) + b \sin(p\theta)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

III.3. III.3.1. Supposons que $p = \omega = 0$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de (i)} &\Leftrightarrow \forall r > 0, r f''(r) + f'(r) = 0 \Leftrightarrow \forall r > 0, (r f')'(r) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall r > 0, r f'(r) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall r > 0, f'(r) = \frac{\lambda}{r} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall r > 0, f(r) = \lambda \ln(r) + \mu.\end{aligned}$$

Si $p = \omega = 0$, f est de la forme $r \mapsto \lambda \ln(r) + \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

III.3.2. Supposons que $p \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = 0$. (i) s'écrit : $\forall r > 0, r^2 f''(r) + r f'(r) - p^2 f(r) = 0$. Cherchons des fonctions solutions sous la forme $f(r) = r^\alpha$ où α est un réel. Pour $r > 0$, on a

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - p^2 f(r) = r^2 \cdot \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} + r \alpha r^{\alpha-1} - p^2 r^\alpha = (\alpha^2 - p^2) r^\alpha,$$

et f est solution si et seulement si $\alpha = p$ ou $\alpha = -p$. Ainsi, les deux fonctions $u : r \mapsto r^p$ et $v : r \mapsto r^{-p}$ sont deux solutions non nulles de l'équation (i).

Montrons que ces deux fonctions sont linéairement indépendantes. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall r > 0, \lambda r^p + \mu r^{-p} = 0$ ou encore $\forall r > 0, \lambda r^{2p} + \mu = 0$. Mais alors, le polynôme $\lambda X^{2p} + \mu$ a une infinité de racines et donc $\lambda = \mu = 0$. La famille de fonctions (u, v) constitue donc une famille libre de solutions de l'équation (i).

On sait que l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (i) constituent un \mathbb{R} -espace de dimension 2. La famille (u, v) est donc une base de cet espace et les solutions de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $r \mapsto \lambda r^p + \frac{\mu}{r^p}$.

Si $\omega = 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, f est de la forme $r \mapsto \lambda r^p + \frac{\mu}{r^p}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

III.4. Soit f une solution de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$. Pour $r > 0$,

$$\begin{aligned} r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) + (r^2 - p^2) f_1(r) &= \frac{r^2}{\omega^2} f''\left(\frac{r}{\omega}\right) + \frac{r}{\omega} f'\left(\frac{r}{\omega}\right) + (r^2 - p^2) f\left(\frac{r}{\omega}\right) \\ &= \left(\frac{r}{\omega}\right)^2 f''\left(\frac{r}{\omega}\right) + \left(\frac{r}{\omega}\right) f'\left(\frac{r}{\omega}\right) + \left(\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 \omega^2 - p^2\right) f\left(\frac{r}{\omega}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car f est solution de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$.

f_1 est solution de l'équation (B_p) sur $]0, +\infty[$.